EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

20e JAARGANG 1943/44

Nr. 3, 4

Prijs per Jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 2,50 voor het verenigingsjaar van 1 September 1943 t/m 31 Augustus 1944 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Het bewijs van het gebruikte lemma, dat waarschijnlijk met andere hulpstellingen in een aanhangsel van het werk is voorgekomen, is verloren gegaan. Het kan als volgt gegeven zijn.

Fig. 163.

Men moet aantoonen

$$(TN,\ TH) \gtreqqless (\Gamma K,\ OK)$$

of

$$\mathbf{O}(TN,\ OK) \gtreqqless \mathbf{O}(\Gamma K,\ TH)$$

Snijdt nu de as de horizontale rechten door T en N opv. in Λ en X, dan kan men ook bewijzen

$$\mathbf{O}(\Lambda X,\ OK) \gtreqqless \mathbf{O}(\Gamma K,\ IK)$$

Om de ligging van X op $O\Gamma$ te bepalen, merken we op

$$(\Gamma X,\ I\Lambda) = (\Lambda\Gamma,\ TI)$$

dus

$$[\mathbf{T}(\Gamma X),\ \mathbf{T}(I\Lambda)] = (O\Gamma,\ OI) = [\mathbf{O}(O\Gamma,\ OI),\ \mathbf{T}(OI)]$$

en, wegens $\Lambda I = 2\ OI$,

$$\mathbf{T}(\Gamma X) = 4\mathbf{O}(O\Gamma,\ OI)$$

Nu is

$$\mathbf{O}(\Lambda X,\ OK) - \mathbf{O}(\Gamma K,\ IK) = \mathbf{O}(OX + OI,\ OK) - \mathbf{O}(O\Gamma - OK,\ OK - OI) = \mathbf{T}(OK) - \mathbf{O}(OK,\ O\Gamma - OX) + \mathbf{O}(O\Gamma,\ OI) = \mathbf{T}(OK) - \mathbf{O}(OK,\ \Gamma X) + \tfrac{1}{4}\mathbf{T}(\Gamma X) = \mathbf{T}(OK - \tfrac{1}{2}\Gamma X) \text{ óf } \mathbf{T}(\tfrac{1}{2}\Gamma X - OK).$$

In ieder geval is dus

$$\mathbf{O}(\Lambda X,\ OK) \geqq \mathbf{O}(\Gamma K,\ IK)$$

waarmee het gestelde bewezen is.

Prop. 7 bevat de analoge stelling voor een segment, dat met den top naar boven drijft.

9. Ten slotte wordt in de zeer omvangrijke propositie 10 het geval

$$h > \tfrac{15}{4}\Pi'$$

behandeld, dat tot een onderscheiding van zes mogelijkheden voert. Archimedes gaat uit van den stand, die in fig. 164 is afgebeeld: de grondcirkel van het segment raakt den vloeistofspiegel en het lichaam is zoover ingedompeld, dat de diameter k van het ondergedompelde segment voldoet aan de betrekking

$$s = \frac{k^2}{h^2}.$$

Om de verschillende mogelijkheden te overzien, is de diameter AB in horizontalen stand geteekend, terwijl de doorsnede van den

Fig. 164.

vloeistofspiegel AE om A draait; daarbij doorloopt dus E de orthotome AOB (I). Is nu weer N het midden van AE, dan snijdt de lijn

door N evenwijdig met $O\Gamma$ de kromme in het punt T, waar de raaklijn horizontaal (parallel aan den vloeistofspiegel AE) loopt. Draait AE om A, dan verplaatst de diameter $TN = k$ zich evenwijdig aan de as. Daar $AN = \frac{1}{2} AE$, is het duidelijk, dat N een orthotome $\Gamma\Theta A$ (II) doorloopt, die door A en het midden Γ van AB gaat en waarvan de top Θ het midden van AO is. Bepaalt men nu op den veranderlijken diameter TN van het ondergedompelde segment telkens het zwaartecentrum M door de betrekking $TM = 2\ MN$, dan leert een eenvoudige berekening, dat M een orthotome (III) doorloopt, die door A en door Z gaat en waarvan de top Σ zoo op AO ligt, dat zijn afstand $\Sigma\Phi$ tot AB $\frac{3}{5} h$ bedraagt. M doorloopt den boog $Z\Sigma A$ van deze kromme.

Zij nu als steeds $ZK = \Pi$ en P de projectie van Σ op $O\Gamma$. Dan is $PZ = (\frac{3}{5} - \frac{1}{3})\ h = \frac{4}{15} h$ en dus is, in verband met de onderstelling $h > \frac{15}{4} \Pi$, $ZP > ZK$. De lijn door K loodrecht op $O\Gamma$ snijdt dus de kromme III in twee punten M_1 en M_2, die opv. op de standen T_1N_1 en T_2N_2 van den diameter TN liggen.

De figuur stelt nu onmiddellijk in staat om, wanneer een waarde van s of, wat wegens de betrekking $s = \frac{k^2}{h^2}$ op hetzelfde neerkomt, een waarde van k gegeven is, uit te maken, of het lichaam, zoo geplaatst, dat de grondcirkel den vloeistofspiegel raakt en de diameter van het ondergedompelde segment k bedraagt, al dan niet in dien stand zal blijven drijven. Men heeft nl. het lijnstuk k slechts in een richting evenwijdig aan de as $O\Gamma$ tusschen de krommen I en II in te schuiven, de punten M en H *) te bepalen, waar het opv. de krommen III en de rechte door K loodrecht op $O\Gamma$ snijdt en nu na te gaan, hoe M ligt ten opzichte van T,H en N. Het is immers bekend, dat H in de verticaal van Z ligt (HZ staat loodrecht op den horizontalen vloeistofspiegel AE). De as $O\Gamma$ zal zich dus oprichten, zijn stand behouden of minder steil gaan staan, al naar gelang M ligt tusschen N en H, in H of tusschen H en T. Dit geeft dus voorloopig een onderscheiding van vijf gevallen, nl.

	Ligt M op III	dan ligt M op TH
1.	tusschen Z en M_1	tusschen H en N.
2.	in M_1	in H
3.	tusschen M_1 en M_2	tusschen H en T.

*) H is in fig. 164 niet geteekend.

4.	in M_2	in H
5.	tusschen M_2 en A	tusschen H en N.

10. We zullen nu eerst uiteenzetten, hoe dit alles door Archimedes behandeld wordt. Hij begint met invoering der orthotomen, II en III door te eischen dat de segmenten, die AB er van afsnijdt, dus $A\Theta\Gamma$ en $A\Sigma Y$ gelijkvormig zullen zijn met het segment AOB (d.w.z. dat de koorden $A\Gamma$, AY, AB evenredig zullen zijn met de diameters $\Theta\Xi$, $\Sigma\Phi$, $O\Gamma$) terwijl II haar top Θ moet hebben in het midden van AO en III in een punt Σ van AO, zoo gelegen, dat de afstand van de projectie P van Σ op $O\Gamma$ op een afstand $\frac{4}{15}h$ van Z verwijderd is.

Er moet nu dus bewezen worden

1. N is het midden van AE.
2. De kromme III gaat door Z.
3. $TM = 2\,MN$.

Deze bewijzen worden òf niet geleverd òf slechts vluchtig geschetst. We kunnen ze als volgt gegeven denken.

ad 1) De krommen I en II hebben in A de raaklijn gemeen; immers de lijn, die I in A raakt, gaat door een punt ε, op het verlengde van ΓO zoo gelegen, dat $\varepsilon O = O\Gamma$ en zij snijdt dus het verlengde van $\Xi\Theta$ in ϑ zoo, dat $\Xi\Theta = \Theta\vartheta$; zij raakt dus in A ook aan II. Toepassing van **Q.P.** 5 (III; 2,7) opv. op I en op II geeft nu

$$(T\tau,\ T\delta) = (A\delta,\ B\delta) \text{ dus } (\tau\delta,\ T\tau) = (AB,\ A\delta)$$
$$(N\tau,\ N\delta) = (A\delta,\ \Gamma\delta) \text{ dus } (\tau\delta,\ N\tau) = (A\Gamma,\ A\delta)$$

Daar $AB = 2\,A\Gamma$ volgt hieruit $N\tau = 2\,T\tau$.
Nu nogmaals **Q.P.** 5 toepassend (op het segment AOE van I) vindt men

$$(T\tau,\ TN) = (AN,\ EN) \text{ dus } (\tau N,\ T\tau) = (AE,\ AN)$$

waaruit wegens

$$\tau N = 2T\tau, \text{ volgt } AE = 2AN.$$

Archimedes volstaat met op te merken, dat AN en AE gelijkstandige lijnstukken zijn in de gelijkvormige segmenten $A\Theta\Gamma$ en AOB.

ad 2) De stelling **Q.P.** 4 (III; 2,6), in omgekeerde richting

gelezen, formuleert een voorwaarde, die voldoende is om te besluiten, dat een punt op een orthotome ligt. Opdat Z op III ligt, wordt dus vereischt

$$(O\Gamma,\ OZ) = (A\Phi,\ \Phi\Gamma)$$

Nu is

$$\Sigma\Phi = P\Gamma = h - OP = h - (\tfrac{2}{3}h - \tfrac{4}{15}h) = \tfrac{3}{5}h$$

dus, wegens de gelijkvormigheid der segmenten,

$$AY = \tfrac{3}{5}AB, \text{ dus } A\Phi = \tfrac{3}{10}AB.$$

Verder is $\Phi\Gamma = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{10})AB = \tfrac{2}{10}AB$, dus

$$(A\Phi,\ \Phi\Gamma) = (3,\ 2) = (O\Gamma,\ OZ)$$

ad 3) Als boven zien we in, dat $A\varepsilon$ in A ook aan III raakt. Toepassing van **Q.P.** 5 op I, III, II geeft nu opv.

$$(\tau T,\ T\delta) = (A\delta,\ B\delta) \text{ dus } (\tau\delta,\ T\tau) = (AB,\ A\delta)$$
$$(\tau M,\ M\delta) = (A\delta,\ Y\delta) \text{ dus } (\tau\delta,\ M\tau) = (AY,\ A\delta)$$
$$(\tau N,\ N\delta) = (A\delta,\ \Gamma\delta) \text{ dus } (\tau\delta,\ N\tau) = (A\Gamma,\ A\delta)$$

Men heeft dus

$$\mathbf{O}(AB,\ T\tau) = \mathbf{O}(AY,\ M\tau) = \mathbf{O}(A\Gamma,\ N\tau)$$

dus

$$\mathbf{O}(AB,\ M\tau - MT) = \mathbf{O}(AY,\ M\tau)$$

dus

$$\mathbf{O}(M\tau,\ BY) = \mathbf{O}(MT,\ AB) \quad \text{of} \quad (MT,\ M\tau) = (BY,\ AB)$$

Evenzoo $(M\tau,\ MN) = (A\Gamma,\ \Gamma Y)$

De reden $(MT,\ MN)$ is dus samengesteld uit

$$(BY,\ AB) \text{ en } (A\Gamma,\ \Gamma Y)$$

Nu bleek boven

$$AY = \tfrac{3}{5}AB, \text{ dus } BY = \tfrac{2}{5}AB \text{ en } \Gamma Y = \tfrac{1}{10}AB.$$

Dus is

$$(BY,\ AB) = (2,\ 5) \text{ en } (A\Gamma,\ \Gamma Y) = (5,\ 1)$$

zoodat

$$(MT,\ MN) = (2,\ 1).$$

Over de wijze, waarop nu telkens een lijnstuk TN van voorgeschreven lengte k tusschen de krommen I en II in de richting van $O\Gamma$ wordt ingeschoven, laat Archimedes zich niet uit. Het is waarschijnlijk, dat dit als een neusis uitgevoerd moet worden gedacht.

Gaan we nu bij Archimedes de door hem onderscheiden gevallen, die verkregen worden door voorwaarden aan s op te leggen, na, dan blijkt dat hij er niet vijf, maar zes heeft. Dit staat in verband met het feit, dat de evenwichtsstand voor het geval

$$s \geqq \frac{(h - \frac{3}{2}\Pi)^2}{h^2}$$

reeds uit Prop. 4 bekend is. In deze Propositie werd nl. aangaande h uitsluitend ondersteld $h > \frac{3}{2}\Pi$ en als de voorwaarde $h > \frac{15}{4}\Pi$ van Prop. 10 geldt, is aan die onderstelling voldaan.

We brengen nu $h - \frac{3}{2}\Pi$ in de figuur als afstand van O tot een punt Ω op $O\Gamma$. (Archimedes doet dit, door $K\Omega = \frac{1}{2}\, OK$ te stellen; dat komt neer op $O\Omega = \frac{3}{2}OK = \frac{3}{2}(\frac{2}{3}h - \Pi) = h - \frac{3}{2}\Pi$)

Hoe Ω ligt ten opzichte van Z, hangt nog weer van h af. Men heeft $O\Omega \gtreqless OZ$ voor $h \gtreqless \frac{9}{2}\Pi$; in de figuur is $O\Omega < OZ$).

Voor

$$s = \frac{k^2}{h^2} \geqq \frac{O\Omega^2}{h^2}$$

dus voor $k \geqq O\Omega$, zal het lichaam zich dus oprichten en stabiel gaan drijven met verticale as. Denken we ons TN in den stand T_0N_0 waarin $T_0N_0 = O\Omega$, dan kunnen we de onderscheiding van de in Prop. 10 nieuw behandelde vijf gevallen krijgen door M tusschen M_0 en A te laten bewegen. Noemen we nog de hoeken, die de raaklijnen in T_1 en T_2 opv. met ΓO maken, γ_1 en γ_2, dan kunnen we de door Archimedes uitgesproken stellingen als volgt samenvatten:

Is		dan zal in den stand van stabiel evenwicht de omtrek van het grondvlak van het segment den vloeistofspiegel snijden in	en de as zal in dien stand ten opzichte van den horizon hellen onder een hoek α die voldoet aan:
I.	$\frac{O\Omega^2}{O\Gamma^2} > s > \frac{T_1N_1^2}{O\Gamma^2}$	0 punten.	$\alpha > \gamma_1$
II.	$s = \frac{T_1N_1^2}{O\Gamma^2}$	1 punt.	$\alpha = \gamma_1$
III.	$\frac{T_1N_1^2}{O\Gamma^2} > s > \frac{T_2N_2^2}{O\Gamma^2}$	2 punten.	
IV.	$s = \frac{T_2N_2^2}{O\Gamma^2}$	1 punt.	$\alpha = \gamma_2$
V.	$\frac{T_2N_2^2}{O\Gamma^2} > s$	0 punten.	$\alpha < \gamma_2$

Archimedes bewijst deze proposities uitvoerig langs synthetischen weg in figuren, waarin de vloeistofspiegel weer horizontaal geteekend is.

Daar zijn synthesen echter telkens de volkomen omkeeringen der boven gegeven analysen zijn, zullen we ze hier niet meedeelen.

We merken ten slotte nog op, dat Archimedes in de proposities 8 en 9 van Boek I reeds stellingen van denzelfden aard als die in Boek II over het drijvend segment van een orthoconoide handelen, heeft uitgesproken over een bolsegment. Aangetoond wordt, dat in den toestand van stabiel evenwicht de as verticaal staat, zoowel wanneer het platte grensvlak, naar boven gekeerd, geheel buiten de vloeistof uitsteekt als wanneer het, omlaag gericht, geheel beneden den vloeistofspiegel ligt. De methode is dezelfde als die bij de orthotome is toegepast. De juistheid van het resultaat volgt onmiddellijk uit het feit, dat het zwaartecentrum van het ondergedompelde deel (dat ook een bolsegment is) in de verticaal van het middelpunt ligt.

In beide proposities is het vloeistofoppervlak bolvormig gedacht om het wereldmiddelpunt als centrum.

HOOFDSTUK XV.

VARIA.

We berichten in dit laatste hoofdstuk over enkele kleinere en slechts hetzij fragmentarisch, hetzij door referaten bij andere schrijvers bekend gebleven verhandelingen van Archimedes.

I. RUNDERPROBLEEM.[1])

Dit in de oudheid reeds vermaarde vraagstuk[2]) is vervat in een epigram, dat blijkens het opschrift door Archimedes aan Eratosthenes was gezonden met opdracht, het aan de Alexandrijnsche mathematici voor te leggen. Dat het, in den overgeleverden vorm, door Archimedes zou zijn geschreven, wordt van philologische zijde onwaarschijnlijk geacht[3]). Dit sluit echter niet uit, dat het vraagstuk zeer wel van hem afkomstig kan zijn. Men heeft zelfs[4]) onderstellingen gemaakt omtrent de bedoeling, die bij het stellen der opgave kan hebben voorgezeten: het probleem zou een tour de force van Archimedes geweest zijn ter beschaming van Apollonios, die de verhouding van omtrek en diameter van een cirkel nauwkeuriger had berekend dan in de *Cirkelmeting* geschied was en die naar aanleiding van den *Zandrekenaar* ook een werk over het uitdrukken van groote getallen had geschreven. Het is uiteraard

---

[1]) Opera II, 528—534. We zagen in Hoofdstuk II reeds, dat de tekst eerst in 1773 door G. E. Lessing is gepubliceerd.

[2]) In de scholia bij Plato's *Charmides* 165 e wordt het als onderwerp uit de logistica vermeld (geciteerd bij Heiberg, *Opera* II, 528). Evenzoo door Heroon, *Definitiones, Heronis Opera* IV, 98. Wanneer Cicero tweemaal (*Epistulae ad Atticum* XII, 4 en XIII, 28) van een πρόβλημα Ἀρχιμήδειον spreekt, om iets heel moeilijks aan te duiden, denkt hij waarschijnlijk ook wel aan het vraagstuk der runderen.

[3]) De philologische zijde van het probleem wordt uitvoerig behandeld door B. Krumbiegel, *Das Problema bovinum des Archimedes.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXV (1880). Hist.-litt. Abt. 121—136.

[4]) Hultsch in Pauly-Wissowa, *Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft,* s. v. Archimedes, col. 534*b*—535*a*.

niet wel mogelijk, dergelijke hypothesen over de motieven, die Grieksche mathematici tot het scheppen van hun werken kunnen hebben bewogen, op eenigerlei wijze te toetsen.

We brengen hier de formuleering van het probleem uit de Ionische disticha, waarin het staat uitgedrukt, over in de teekentaal der algebra.

De runderen van Helios weiden op het eiland Sicilie in vier kudden van verschillende kleuren: wit, zwart, bont en bruin. Noemen we de aantallen stieren, die in deze kudden voorkomen, opv. *W, Z, P, B,* de aantallen koeien evenzoo *w, z, p, b,* dan zijn tusschen deze aantallen de volgende betrekkingen gegeven:

$$\left.\begin{array}{ll} W = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})\, Z + B & w = (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})\, (Z + z) \\ Z = (\frac{1}{4} + \frac{1}{5})\, P + B & z = (\frac{1}{4} + \frac{1}{5})\, (P + p) \\ P = (\frac{1}{6} + \frac{1}{7})\, W + B & p = (\frac{1}{5} + \frac{1}{6})\, (B + b) \\ & b = (\frac{1}{6} + \frac{1}{7})\, (W + w) \end{array}\right\} \quad (I)$$

Bovendien wordt geëischt [5])

$$\left.\begin{array}{ll} (II) & W + Z \text{ is een vierkant getal, dus van den vorm } n^2 \\ (III) & P + B \text{ is een driehoekig getal, dus van den vorm } \\ & \dfrac{m(m+1)}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{c} n \text{ en } m \\ \text{geheel} \\ \text{positief.} \end{array}$$

Beschouwt men alleen de zeven homogene vergelijkingen I met acht onbekenden, dan kan men de waarden der acht onbekenden

---

[5]) Deze eisch wordt gesteld door opgave van de figuur, die de bedoelde runderen bij ordelijke opstelling vormen. Van de witte en zwarte stieren heet het, dat zij stonden *ἰσόμετροι εἰς βάθος εἰς εὖρός τε* Vat men dit zoo op, dat er evenveel in de lengte als in de breedte stonden, dan komt men tot den eisch $W + Z = n^2$. Leest men er echter in, dat zij een vierkant vulden, dan kunnen er, daar een stier langer is dan breed, niet evenveel in de lengte hebben gestaan als in de breedte. In dat geval luidt de eisch $W + Z = mn$ (m en n geheel positief). Het probleem wordt hierdoor sterk vereenvoudigd. Deze opvatting lijkt echter moeilijk houdbaar. Immers, opdat de stieren een vierkant kunnen vormen, moet er tusschen m en n nog een betrekking bestaan, die samenhangt met de verhouding van lengte en breedte van een stier. Aannemende, dat lengte en breedte onderling meetbaar zijn, komt men tot de voorwaarde $W + Z = \lambda n^2$ (n geheel positief, λ rationaal positief); waardoor de vereenvoudiging weer vrijwel te loor gaat. Voor de oplossing van het vereenvoudigde probleem kan men raadplegen Heath, *Archimedes*, 320.

opschrijven als veelvouden van een hulpvariabele t en wel vindt men [6])

$$\begin{aligned} W &= 2.3.7.53.4657\ t = 10366482\ t \\ Z &= 2.3^2.89.4657\ t = 7460514\ t \\ P &= 2^2.5.79.4657\ t = 7358060\ t \\ B &= 3^4.11.4657\ t = 4149387\ t \\ w &= 2^3.3.5.7.23.373\ t = 7206360\ t \\ z &= 2.3^2.17.15991\ t = 4893246\ t \\ p &= 2^2.3.5.7.11.761\ t = 3515820\ t \\ b &= 3^2.13.46489\ t = 5439213\ t \end{aligned}$$

Door II wordt nu geeischt, dat

$W + Z = 2^2.3.11.29.4657\ t$ het vierkant is van een geheel getal. Hiervoor is noodig en voldoende

$$t = 3.11.29.4657\ x^2 \qquad (x \text{ geheel positief}).$$

Wegens III moet verder $P + B = 7.353.4657\ t = 3.7.11.29.353.4657^2x^2$ van den vorm $\frac{1}{2}y\ (y + 1)$ zijn (y geheel positief).

Stellen we $2y + 1 = u$, dan is

$$u^2 - 1 = 4y\ (y + 1) = 2^3.3.7.11.29.353(4657\ x)^2$$

of, als we $2.4657\ x$ door v voorstellen

$$u^2 - \lambda v^2 = 1 \qquad (\lambda = 2.3.7.11.29.353)$$

Het probleem leidt dus tot een vergelijking van Pell. Gevraagd wordt de kleinste oplossing voor v, die door 2.4657 deelbaar is.

Deze vergelijking is opgelost met behulp van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{\lambda} = \sqrt{4729494}$, die een periode heeft van 91 getallen.

Het bleek, dat W een getal was van 206545 cijfers, beginnend met 1598 en dat het totale aantal runderen van Helios werd uitgedrukt door een getal van 206545 cijfers, beginnend met 7766.

Dat Archimedes dit probleem volledig zou hebben opgelost, is onwaarschijnlijk.

---

[6]) De meegedeelde oplossing van het probleem is ontleend aan A. Amthor, *Das Problema bovinum des Archimedes.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXV (1880). Hist. litt. Abt. 153—171.

De editie van Heiberg bevat een scholium [7]) op het runderprobleem, waarin een stel oplossingen voor de acht onbekenden wordt meegedeeld. De acht opgegeven waarden blijken te voldoen aan de betrekkingen I en wel zijn het de waarden, die men verkrijgt, door in de boven opgegeven uitdrukkingen voor W, Z, P, B, $t = 80$ te stellen, alsmede de correspondeerende waarden voor w, z, p en b. Echter is de som $Z + W$ niet vierkant en de som $P + B$ niet driehoekig.

II. LEMMATA.

Van dit werk is, zooals reeds vermeld werd, alleen een Arabische redactie over, die in Latijnsche vertaling toegankelijk is. Dat het in den overgeleverden vorm een oorspronkelijk geschrift van Archimedes zou zijn, is uitgesloten; hij wordt er nl. zelf tweemaal in geciteerd (Prop. 4 en 14) en bovendien wordt er een verhandeling over vierhoeken als *noster tractatus de figuris quadrilateris* in vermeld, die men nergens onder zijn werken opgegeven vindt.

De Arabische bewerker Thabit ben Qurra zegt in zijn voorrede [8]) op gezag van een doctor Almochthasso, dat het werk terug te brengen is tot Archimedes en dat het slechts weinige, maar zeer schoone proposities bevat, die men moet bestudeeren tusschen de lectuur van Euclides en die van den Almagest. Bij de bewerking heeft hij gebruik gemaakt van een werk van Abusahal Alkuhi, getiteld *Ordinatio libri Archimedis de assumptis*. Blijkbaar hebben de Arabieren dus aan de inkleeding ook wel het een en ander gewijzigd. Vermoedelijk is het echter in de oorspronkelijke Grieksche redactie reeds een compilatie van belangrijke planimetrische hulpstellingen en resultaten geweest [8a]), zoodat het niet meer mogelijk is, uit te maken, in hoeverre de inhoud van Archimedes afkomstig is.

Het werk bevat vijftien proposities van zeer uiteenloopend gehalte die we niet volledig zullen vermelden. We beperken ons tot

---

7) *Opera* II, 532 seq. De hierin opgegeven waarden zijn $W = 829318560$; $w = 576508800$; $Z = 596841120$; $z = 391459680$; $P = 588644800$; $p = 281265600$; $B = 331950960$; $b = 435137040$.

8) Geciteerd bij Heiberg, *Opera* II, 511 noot.

8a) Heath, *Archimedes, Introduction* XXXII, noot, wijst er op, dat de compilator waarschijnlijk uit dezelfde bron heeft geput als Pappos, getuige het groote aantal naar inhoud identieke proposities in het *Liber Assumptorum* en in de *Collectio*.

bespreking van de proposities 4—6 en 14, waarin de figuren *Arbelos* en *Salinon* onder uitdrukkelijke vermelding van het auteurschap van Archimedes worden behandeld.

In Prop. 4 (fig. 165) wordt de figuur *Arbelos* als volgt ingevoerd:

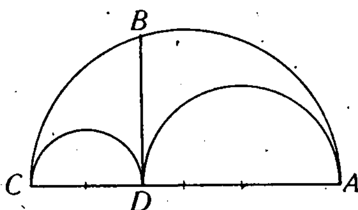


Fig. 165.

Op een lijnstuk *AC* kiest men een punt *D* en beschrijft nu aan één zijde van *AC* de halve cirkels, die opv. *AC, AD, CD* tot diameter hebben. Arbelos [9]) heet nu de figuur, die door de drie halve cirkelomtrekken wordt ingesloten. Hiervan wordt in Prop. 4 de eigenschap bewezen, dat de oppervlakte gelijk is aan die van den cirkel, waarvan diameter is de halve koorde *DB*, die in *D* loodrecht op *AC* staat. Dit volgt onmiddellijk uit

$$\mathbf{T}(AC) = \mathbf{T}(AD) + \mathbf{T}(CD) + 2\mathbf{O}(AD, CD)$$
$$= \mathbf{T}(AD) + \mathbf{T}(CD) + 2\mathbf{T}(BD)$$

dus $\frac{1}{2}[\mathbf{T}(AC) - \mathbf{T}(AD) - \mathbf{T}(CD)] = \mathbf{T}(BD)$

welke zelfde betrekking dus ook tusschen de oppervlakten der cirkels met de diameters *AC, AD, CD* en *BD* bestaat.

In Prop. 5 wordt bewezen, dat de cirkels beschreven in elk der deelen, waarin de inwendig gemeenschappelijke raaklijn der twee kleinere cirkels den Arbelos verdeelt, gelijk zijn. De ingeschreven cirkels raken elk aan den buitensten cirkel, aan de gemeenschappelijke raaklijn der twee binnenste en aan een van deze twee cirkels zelf. Over hun constructie (een der Apollonische raakproblemen) wordt niet gesproken.

Laat in fig. 166 de Arbelos gevormd worden door de cirkels **K** (*AB*), **K** (*AC*) en **K** (*BC*). De ingeschreven cirkels van de deelen, waarin de halve koorde, die in *C* loodrecht op *AB* staat, den arbelos verdeelt, raken den buitensten cirkel, een der binnenste en de koorde opv. in *F, G, E* en in *N, M, L*. Is dan *EH* middellijn van den eerstgenoemden cirkel, dan zijn, volgens een in Prop. 1 bewezen hulpstelling, de puntdrietallen *F, H, A* en *F, E, B* collineair. In

[9]) Het woord duidt een schoenmakersmes aan.

$\triangle$ *ABD* is *E* hoogtepunt, dus ontmoeten *BD* en *AE* elkaar in *I* op den omtrek van **K** (*AB*); het is verder duidelijk, dat *AE* en *HC* door *G* gaan (*G* is inwendig gelijkvormigheidspunt van **K** (*AC*) en **K** (*HE*).

Blijkbaar is *CH* // *BD*, dus

$$(AB, BC) = (AD, DH) = (AC, HE)$$

dus

$$\mathbf{O}(AB, HE) = \mathbf{O}(AC, BC)$$

waardoor de diameter *HE* bepaald is. Daar de uitdrukking sym-

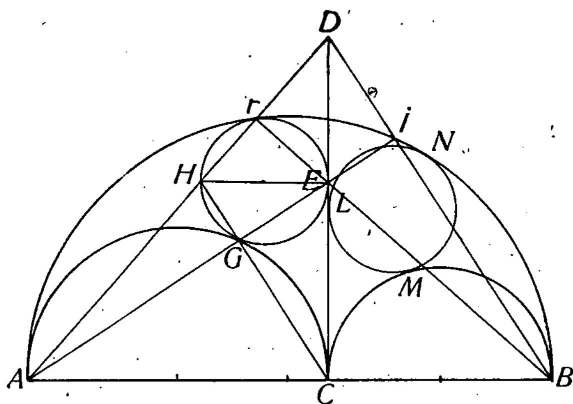


Fig. 166.

metrisch is in *AC* en *BC*, is blijkbaar de diameter van den cirkel *NLM* gelijk aan *HE*.

In Prop. 6 wordt de diameter van een in een arbelos beschreven (d.w.z. aan den buitensten cirkel inwendig en aan de twee binnenste uitwendig rakenden) cirkel bepaald voor het geval, dat de verhouding der diameters van de twee binnenste cirkels 3 : 2 is.

Verdere stellingen over den arbelos vindt men bij Pappos en verschillende latere schrijvers [10]).

In de Proposities 7—13 worden verscheidene, deels tamelijk elementaire lemmata afgeleid, die we zullen laten rusten. In Prop.

---

[10]) Pappos, *Collectio* IV, 14 seq.; 208 seq.
A. Lidonnici, *Gli Arbeli*. Period. d. Matem. (4) 12 (1932), 253—269.

14 volgt dan de behandeling van de figuur *Salinon* [11]) (*Salinum*), die als volgt ontstaat (fig. 167):

Op de middellijn AB van een halven cirkel AGB maakt men $AC = BD$ en beschrijft nu halve cirkels met diameters AC en BD aan dezelfde zijde van AB als de gegeven halve cirkel, alsmede een halven cirkel met diameter CD aan de andere zijde. De gevormde figuur heet Salinon.

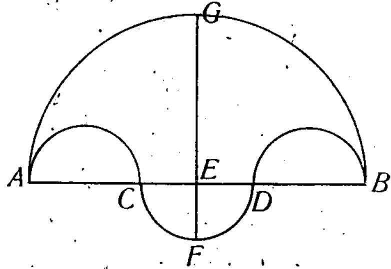


Fig. 167.

Hiervan wordt in Prop. 14 bewezen, dat de oppervlakte gelijk is aan die van een cirkel, waarvan de diameter FG gelijk is aan de som van de stralen van den gegeven halven cirkel en den aan de andere zijde geconstrueerden.

Bewijs:

$$\mathbf{T}(AC) + \mathbf{T}(AD) = 2[\mathbf{T}(AE) + \mathbf{T}(ED)] \quad \text{(Euclides II, 10.)}$$

Ook is, wegens $AB = 2\ AE$, $CD = 2\ ED$,

$$\mathbf{T}(AB) + \mathbf{T}(CD) = 4[\mathbf{T}(AE) + \mathbf{T}(ED)]$$

dus, daar $AD = FG$.

$$\mathbf{T}(AB) + \mathbf{T}(CD) = 2[\mathbf{T}(AC) + \mathbf{T}(FG)]$$

Men heeft dus ook

$$\tfrac{1}{2}[\mathbf{K}(AB) + \mathbf{K}(CD) - \mathbf{K}(AC) - \mathbf{K}(BD)] = \mathbf{K}(FG)$$

In Prop. 15 volgt nog een geisoleerde planimetrische stelling.

Zooals men ziet, beslaan Arbelos en Salinon slechts een klein deel van het werk. De hierop betrekking hebbende proposities dragen echter het meest het karakter van een bereikt resultaat,

---

[11]) Over de beteekenis van het woord verschillen de meeningen. Een uitvoerige bespreking vindt men bij Heath, *Archimedes*, Introd. XXXIII, noot. Vermoedelijk is het woord σάλινον pas door een lateren schrijver aan de door Archimedes ingevoerde figuur gehecht. Heath houdt het voor een Grieksche weergave van het lat. *salinum, zoutvat;* de naam zou afgeleid zijn uit de gelijkenis van het onderste deel der figuur met dit in de oudheid zeer essentieele deel van het huisraad. Cantor brengt het in verband met σάλος, schommeling; de vertaling zou dan *golflijn* kunnen zijn. Heiberg denkt aan een Arabische verbastering van σέλινον, *apium,* terwijl Gow het door *zeef* vertaalt.

terwijl alle andere echte hulpstellingen zijn, die haar belang alleen kunnen ontleenen aan toepassingen, die ervan gemaakt kunnen worden.

III. HALFREGELMATIGE VEELVLAKKEN.

Volgens Pappos [12]) ontdekte Archimedes dertien [13]) van de lichamen, die later als halfregelmatige of Archimedische veelvlakken bekend zijn geworden. Zij behooren alle tot wat men thans halfregelmatige veelvlakken van de eerste soort noemt, een type, dat bepaald wordt door van de verschillende voorwaarden voor regelmatigheid van een veelvlak den eisch van congruentie der zijvlakken los te laten. De zijvlakken zijn dus nog wel regelmatige polygonen en zij vormen aan de hoekpunten nog wel congruente veelvlakshoeken, maar ze hebben niet meer alle evenveel zijden en de veelvlakshoeken zijn dus niet meer regelmatig.

Niet geheel volledig definieert Pappos de bedoelde lichamen als *figuren, omvat door gelijkzijdige en gelijkhoekige, maar niet gelijkvormige polygonen* [14]).

We geven in het volgende een overzicht van de door Archimedes vermelde polygonen. Hierin beduidt:

Z: het aantal zijvlakken.

B: den aard der begrenzing, in dier voege, dat $(m_i, n_k \ldots .)$ aangeeft, dat het lichaam wordt ingesloten door m regelmatige i-hoeken, n regelmatige k-hoeken enz.

P: het aantal zijden van elken veelvlakshoek.

---

[12]) Pappos, *Collectio* V, 34 seq.; 352 seq.

[13]) Ten onrechte zegt Heroon, *Definitiones* 104, *Heronis Opera* IV, 64, dat Archimedes aan de vijf bekende (regelmatige) veelvlakken er acht toevoegde, zoodat hij in het geheel dertien polyeders met omgeschreven bol kende. Hij deelt hier tevens mee, dat twee der door Archimedes behandelde lichamen reeds aan Plato bekend waren, nl. een veertienvlak, dat door acht gelijkzijdige driehoeken en zes vierkanten begrensd wordt (no. II van de boven meegedeelde lijst) en een ander veertienvlak met acht vierkanten en zes gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken (dat echter onder de door Archimedes behandelde lichamen niet voorkomt).

[14]) De kortste formuleering der definitie is: veelvlakken met regelmatige, incongruente zijvlakken en onregelmatige, congruente veelvlakshoeken. De halfregelmatige veelvlakken van de tweede soort hebben onregelmatige, congruente zijvlakken en regelmatige incongruente veelvlakshoeken.

S: de samenstelling van elken veelvlakshoek, in dier voege, dat (i, k, ...) aangeeft, dat in ieder hoekpunt een i-hoek, een k-hoek enz. samenkomen.

H: het aantal hoekpunten, uit B met behulp van P berekend

$$\left(H = \frac{mi + nk + \dots}{P}\right)$$

R: het aantal ribben, uit B berekend

$$\left(R = \frac{mi + nk + \dots}{2}\right).$$

V: de voortbrengingswijze; de beteekenis der notatie wordt hieronder behandeld; plaatsing tusschen ( ) beduidt, dat de aangegeven constructiewijze niet door een klassieken tekst wordt gewaarborgd.

ARCHIMEDISCHE VEELVLAKKEN.

No.	Z.	B.	P.	S.	H.	R.	V.
I.	8	4_3, 4_6	3	3,6,6	12	18	2
II.	14	8_3, 6_4	4	3,4,3,4	12	24	1
III.	14	6_4, 8_6	3	4,6,6	24	36	2
IV.	14	8_3, 6_8	3	3,8,8	24	36	3
V.	26	8_3,18_4	4	3,4,4,4	24	48	(4)
VI.	26	12_4, 8_6, 6_8	3	4,6,8	48	72	(4)
VII.	32	20_3,12_5	4	3,5,3,5	30	60	(1)
VIII.	32	12_5,20_6	3	5,6,6	60	90	(2)
IX.	32	20_3,12_{10}	3	3,10,10	60	90	(3)
X.	38	32_3, 6_4	5	3,3,3,3,4	24	60	
XI.	62	20_3,30_4,12_5	4	3,4,4,5	60	120	(4)
XII.	62	30_4,20_6,12_{10}	3	3,6,10	120	180	(4)
XIII.	92	80_3,12_5	5	3,3,3,3,5	60	150	

De lijst der halfregelmatige veelvlakken der eerste soort is hiermee bijna compleet. Er ontbreken alleen de twee reeksen van polyeders aan, die men, eenigszins misleidend, Archimedische prismata en anti-prismata pleegt te noemen [15]).

---

[15]) Archimedische prismata zijn alle regelmatige prismata, waarvan de hoogte gelijk is aan de grondvlaksribbe ($Z = n + 2$. $B = (2_n, n_4)$. $P = 3$. $S = (4, 4, n)$. $H = 2n$. $R = 3n$). Archimedische

De voortbrengingswijze van de beschreven polyeders wordt uiteengezet in een scholium op Pappos[16]), dat echter helaas slechts ten deele bewaard is gebleven; het breekt af in de behandeling van het lichaam V. Uit wat er over is blijkt, dat Archimedes voor de constructie van de lichamen I—IV uit is gegaan van de vijf regelmatige veelvlakken en dat hij daarop de drie handelwijzen heeft toegepast, die Stevin in zijn studie over de halfregelmatige polyeders[17]) opv. als afknotting 1) *per laterum media,* 2) *per laterum tertias* en 3) *per laterum divisiones in tres partes* betiteld heeft.

Hierbij worden de ribben der regelmatige veelvlakken opv. verdeeld in twee gelijke stukken, in drie gelijke en in drie stukken, waarvan het middelste zich tot de beide uiterste verhoudt als de diagonaal van een zijvlak tot de zijde. In alle drie gevallen wordt het veelvlak aan ieder hoekpunt afgeknot door een vlak, dat van elke door dat punt begrensde ribbe het deelpunt bevat, dat het dichtst bij dat punt gelegen is.

Zoo ontstaat volgens het Scholium het lichaam I uit den tetraeder door constructie 2), II uit den hexaeder[18]), door 1), III uit den octaeder door 2), IV uit den hexaeder door 3). Het fragment breekt af, voordat gezegd is, hoe V kan worden verkregen, wat zeer te betreuren is, omdat hierbij voor de eerste maal een andere constructie wordt vereischt dan bij de vier voorafgaande lichamen. Met behulp van de beschreven afknottingen kan nl. alleen nog VII uit den dodecaeder of den icosaeder worden verkregen (constructie 1), VIII uit den icosaeder (constructie 2) en IX uit den dode-

---

anti-prismata zijn alle prismoiden, waarvan grond- en bovenvlak congruente regelmatige n-hoeken zijn en alle zijvlakken gelijkzijdige driehoeken. Grond- en bovenvlak zijn hierbij uit den stand, dien ze bij een regelmatig prisma innemen, $\frac{\pi}{n}$ ten opzichte van elkaar gedraaid, terwijl hun afstand zoo geregeld is, dat iedere opstaande ribbe gelijk is aan een grondvlaksribbe ($Z = 2n + 2$. $B = (2n_3, 2_n)$. $P = 4$. $S = (3, 3, 3, n)$. $H = 2n$. $R = 4n$).

16) Pappos, *Collectio* 1170.
Herdrukt *Opera* II, 538.

17) Simon Stevin, *Problematum Geometricorum Libri* V. Antwerpen (1583). Een uitvoerige studie over dit werk, waarvan in het bovenstaande gebruik is gemaakt, is: N. L. W. A. Gravelaar, *Stevin's Problemata geometrica.* Nieuw Archief voor Wiskunde (2) V (1902), 106 seq.

18) II ontstaat ook uit den octaeder door constructie 1.

caeder (constructie 3). Het is natuurlijk wel zeer waarschijnlijk, dat Archimedes bij deze drie lichamen ook inderdaad zoo te werk is gegaan. Hoe hij echter de zes overblijvende heeft geconstrueerd, is niet met zekerheid te zeggen. Men kan slechts vermoeden, dat hij voor de lichamen V, VI, XI en XII gebruik zal hebben gemaakt van de methode der dubbele afknotting (4), die hierin bestaat, dat er eerst evenwijdig aan elke ribbe een vlak wordt aangebracht, dat de in haar uiteinden samenkomende ribben in een bepaalde verhouding verdeelt en dat het verkregen lichaam daarna aan een deel der hoekpunten op geschikte wijze wordt afgeknot [19]).

IV. HET STOMACHION.

1. Van dit werk zijn twee fragmenten bewaard gebleven, waarvan het eene, Grieksche, voorkomt in het te Jerusalem ontdekte palimpsest, dat de *Methode* bevat [20]), terwijl het andere een brokstuk is van een Arabische vertaling [21]). Zij zijn samen nog ontoereikend, om een indruk te geven van het doel, dat Archimedes bij het schrijven van zijn verhandeling voor oogen kan hebben gehad.

---

[19]) Zoo ontstaat b.v. V uit een hexaeder als volgt. Verdeel de ribben elk in drie deelen, waarvan het middelste zich tot elk der beide uiterste verhoudt als een zijvlaksdiagonaal tot een ribbe. Breng evenwijdig aan elke ribbe een vlak aan, dat door de dichtstbij gelegen deelpunten van de in haar uiteinden samenkomende ribben gaat. Het verkregen lichaam heeft acht hoekpunten op de lichaamsdiagonalen van den hexaeder. Knot het nu bij elk dezer punten af met een vlak door de drie dichtstbij gelegen hoekpunten van de in de zijvlakken van den hexaeder gevormde vierkanten.

Om VI uit een hexaeder af te leiden, verdeelt men elke ribbe in vijf deelen, waarvan het middelste tot elk der vier andere staat als een zijvlaksdiagonaal tot een ribbe. Als boven snijdt men bij elke ribbe een driezijdig prisma weg. In elk der zijvlakken van den hexaeder blijft nu een vierkant over. Elke ribbe hiervan wordt volgens de boven aangegeven verhouding in drie deelen verdeeld. Daarna wordt aan elk der hoekpunten, die op de lichaamsdiagonalen van den hexaeder liggen, een zeszijdige pyramide afgesneden. Op analoge wijze zijn V en VI ook uit den octaeder te krijgen, XI en XII uit dodecaeder en icosaeder.

Op de voortbrenging van de lichamen X en XIII zullen we hier niet ingaan. Men kan hierover raadplegen: M. Brückner, *Vielecke und Vielfläche. Theorie und Geschichte.* (Leipzig 1900) p. 138.

[20]) *Opera* II, 416.

[21]) Zie Hoofdstuk II. Bij Suter heet het stomachion *συντεμάχιον* [= samenstelling van afgesneden stukjes].

We zullen dus moeten volstaan met een samenvatting van hun inhoud.

Vooreerst iets over het Stomachion [21a]) zelf. Dit is een soort legspel, gespeeld met stukjes ivoor in den vorm van eenvoudige planimetrische figuren, waarbij het er om te doen was, die stukjes zoo aan elkaar te doen sluiten, dat er allerlei gedaanten van menschen of dieren of verschillende voorwerpen werden nagebootst [21b]). Er zijn enkele plaatsen in de literatuur bekend, waar over dit spel gesproken wordt en waaruit men de bedoeling ervan heeft kunnen opmaken. We vermelden hiervan de volgende:

α) Ausonius [22]) vergelijkt een dichtvorm, waarin allerlei verschillende metra door elkaar worden gebruikt met een spel, dat de Grieken *ostomachia* [23]) noemden en dat met veertien stukjes ivoor in den vorm van gelijkbeenige of gelijkzijdige, recht- of scheefhoekige driehoeken gespeeld werd. Als voorbeelden van wat uit die stukjes kon worden samengesteld noemt hij: een olifant, een wild zwijn, een vliegende gans, een gewapende zwaardvechter, een hurkende jager, een blaffende hond, een toren, een schenkkan; hij voegt erbij, dat het ineenzetten hiervan door hen, die in het spel bedreven waren, wonderbaarlijk mocht heeten, terwijl het belachelijk werd, als onervarenen het deden.

β) Ennodius [24]) betitelt een zijner Carmina met *De ostomachio*

[21a]) De naam Stomachion wordt door Heiberg (*Eine neue Archimedeshandschrift,* Hermes 42 (1907), 240) vertaald als *Neckspiel, das einen ärgert und erregt* (cf. lat. stomachari).

[21b]) Bij tegenwoordige kinderen is een dergelijk spel nog in gebruik onder den naam Hamertje Tik.

[22]) *Decimi Magni Ausonii Burdigalensis Opuscula* rec. R. Peiper (Leipzig 1886, p. 208. Ausonius is een Romeinsch dichter en staatsman in de 4e eeuw..

[23]) Aldus de geciteerde tekstuitgave. Heiberg (loc. cit.) merkt echter op, dat de beste mss. de lezing *stomachion* hebben en dat men dit woord ten onrechte met ὀστέον en μαχία in verband heeft gebracht. *Ostomachia* zou dan zoo iets als „beenderenstrijd" moeten beteekenen, wat voor een met stukjes ivoor te spelen spel een wonderlijke benaming zou zijn.

[24]) *Magni Felicis Ennodii Opera* rec. F. Vogel. Monumenta Germ. Hist. Auct. antiq. tomus VII (Berlijn 1885), p. 249. Ennodius (474—521) was bisschop van Ticino.

eburneo [25]). De strekking van het gedichtje is eenigszins raadselachtig, maar de eerste twee verzen

Sollicitata levi marcescunt corda virorum
Tormento: fas est ludere virginibus.

(weer te geven door: door een lichte kwelling bezwijken de harten der mannen; het spel past voor meisjes) getuigen wellicht van de ergernis, die de stomachion-puzzle kon opwekken, terwijl de volgende twee

Frangunt Marmaricis elefans quod misit ab arvis
Per micas sparsum mox solidatur opus.

(te vertalen als: zij breken in stukken, wat de olifant uit de dreven van Marmarica heeft gebracht; het werk, in stukjes verstrooid liggend, is weldra geheel gemaakt) blijkbaar in rijkelijk gewrongen vorm over het samenstellen van figuren uit stukjes ivoor handelen.

γ) Met den naam Archimedes wordt het Stomachion, onder de betiteling *loculus Archimedius* (Archimedische doos) in verband gebracht door Marius Victorinus [26]) en door Attilius Fortunatianus [27]), aan wier mededeelingen we ontleenen, dat het uit veertien stukjes van ivoor van verschillende vormen bestond, dat die stukjes samen een vierkant vormden, dat men hieruit allerlei figuren (een schip, een zwaard, een boompje, een helm, een dolk, een zuil) kon samenstellen en dat dit spel zeer nuttig werd geacht voor kinderen, omdat het geheugen erdoor werd versterkt.

2. De naam *loculus Archimedius* waarborgt nog geenszins, dat het door de bovenstaande aanhalingen nu wel voldoende verduidelijkte spel (waarvan het denkbeeld nog in speelgoed van onzen tijd voortleeft) een uitvinding van Archimedes was. De bijvoeging Archimedius kan de beteekenis van moeilijk hebben, zooals in πρόβλημα Ἀρχιμήδειον [28]) of uitdrukken, dat hij het spel van wiskundig standpunt heeft bestudeerd. Deze laatste mogelijkheid wordt bevestigd door de inleidende zinnen van het werkje, dat hij eraan wijdt en waarin hij het noodzakelijk noemt, enkele eigenschappen van het z.g. Stomachion te behandelen. Uit den verminkten tekst

---

[25]) Zie noot 23. Ook hier heeft het beste ms. stomachio.
[26]) Geciteerd *Opera* II, 417 noot.
[27]) Geciteerd *Opera* II, 417 noot.
[28]) Zie noot 2.

valt op te maken, dat hij o.a. heeft willen nagaan, welke paren hoeken van de voorkomende figuren samen gelijk zijn aan twee rechte hoeken, hetzij exact, hetzij bij benadering en ook, of het soms voorkwam, dat twee der figuren, samengenomen, congruent waren met een andere of met een combinatie van twee.

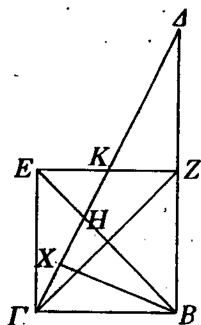


Fig. 168.

In het Grieksche fragment komt van dit onderzoek echter nog niet veel. Er wordt hier (fig. 168) een vierkant *ΓBZE* beschouwd, waarin de lijn, die *Γ* met het midden *K* van *ZE* verbindt, het het verlengde van *BZ* in *Δ* snijdt. *ΓK* snijdt *BE* in *H*, *X* is het midden van *ΓH*. Bewezen wordt nu, dat ∠ *ΓXB* stomp is en dus ∠ *BXH* scherp, maar hiermee breekt de tekst reeds af. Er volgt daarna nog een deel van een tweede propositie, dat te klein is, om iets omtrent het doel van het betoog te kunnen opmaken.

3. Het Arabische fragment is in zooverre interessanter dan het Grieksche, dat hierin werkelijk de veertien stukjes, waaruit het Stomachion bestond, door verdeeling van een vierkant worden voortgebracht.

De propositie, die over de figuur wordt uitgesproken, staat echter niet in naspeurbaar verband met het boven omschreven doel van het onderzoek. Er wordt nl. alleen bewezen, dat al de veertien verkregen deelen met het vierkant onderling meetbaar zijn. We zien er van af, de waarden van al deze verhoudingen mee te deelen en beperken ons tot de uitvoering der verdeeling.

Laat *ABGD* (fig. 169) een vierkant zijn. *E* het midden van *BG*. *Z* het midden van *AD*. *AG* snijdt *EZ* in *F*, *BZ* in *L*. *M* is het midden van *AL*, *H* dat van *BE*. Trek nu door *H* een lijn loodrecht op *BE*, die *BZ* in *T* ontmoet en een lijn *HK*, die verlengd door *A* gaat en *BZ* in *K* ontmoet. Verbind *B* met *M*. De rechthoek *AE* is nu in zeven deelen verdeeld. In den rechthoek *ED* verbindt men het midden *C* van *GZ* met *E* en met het midden *N* van

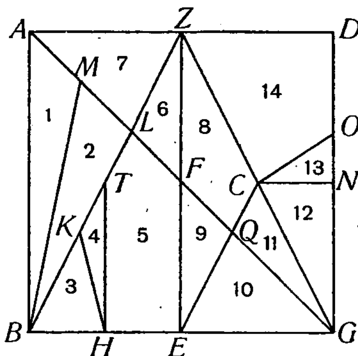


Fig. 169.

GD en trekt men OC zoo, dat zij verlengd door B gaat. Ook deze rechthoek is nu in zeven deelen verdeeld. Het geheele vierkant is nu verdeeld in veertien deelen, die onderling meetbaar zijn.

Of dit resultaat nu een doel op zich zelf was of dat het een rol speelde (en zoo ja, welke) bij het aanvankelijk aangekondigde onderzoek, is niet meer na te gaan.

V. OPPERVLAKTE VAN DEN DRIEHOEK.

Volgens een mededeeling van den Arabischen wiskundige al-Biruni[29]) is van Archimedes de gewoonlijk aan Heroon toegeschreven uitdrukking van de oppervlakte van een driehoek in de zijden afkomstig, die men tegenwoordig door de formule $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ pleegt weer te geven.

Bij Heroon[30]) wordt deze propositie als volgt uitgesproken en bewezen: *Wanneer van een driehoek de zijden gegeven zijn, de oppervlakte te vinden.*

Gegeven zij (fig. 170) de driehoek $AB\Gamma$; de ingeschreven cirkel met centrum H raakt de zijden opv. in Δ, E, Z. Wanneer nu Π den omtrek van $AB\Gamma$ voorstelt, heeft men de bekende betrekking

$$\text{O}(\Pi,\ HE) = 2\,.\,\triangle\, AB\Gamma$$

Verleng nu ΓB met $B\Theta = A\Delta$, dan is

$$\Gamma\Theta = \tfrac{1}{2}\Pi, \text{ dus}$$

$$\text{O}(\Gamma\Theta,\ HE) = \triangle AB\Gamma \quad (1)$$

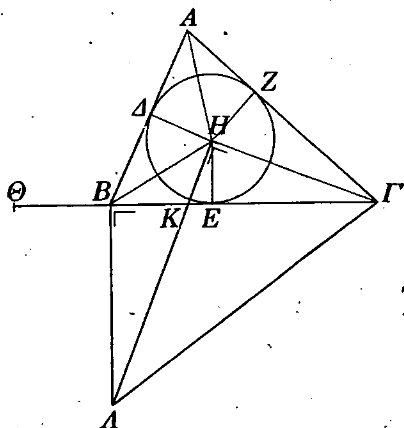


Fig. 170.

Er volgt nu een stap, die in de klassieke Grieksche wiskunde niet gebruikelijk was en die twijfel wekt, of het bewijs in den

[29]) *Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise* von Abū'l Raihān Muhammed-el-Bīrūnī. Übersetzt von H. Suter. Bibl. Math. (3) XI (1910—1911), pag. 39. In het zelfde werk (pag. 37) wordt ook de berekening van de hoogtelijnen van een driehoek en van de stukken, waarin zij de zijden verdeelen, op naam van Archimedes gesteld.

[30]) Heroon, *Metrica* I, 8. *Heronis Opera* III, 18—24.

door Heroon meegedeelden vorm wel van Archimedes afkomstig kan zijn. De rechthoek $\mathbf{O}(\Gamma\Theta, HE)$ (in het Grieksch τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Theta, HE$) wordt nl. weer opgevat als een zijde van een varieteit van hoogere orde, die echter in de driedimensionale ruimte der Grieksche meetkunde niet kan voorkomen. Dit bewijst, dat de uitdrukking τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Theta, HE$ haar directe meetkundige beteekenis verloren heeft en evengoed als $\Gamma\Theta$ en HE zelf beschouwd wordt als een dimensielooze grootheid (of getal), dat weer gequadrateerd kan worden. In overeenstemming hiermee kunnen we de uit (1) getrokken conclusie schrijven als

$$\mathbf{T}(\Gamma\Theta) \,.\, \mathbf{T}(HE) = \triangle AB\Gamma \,.\, \triangle AB\Gamma \qquad (2)$$

Trek nu door H een lijn loodrecht op ΓH en door B een lijn loodrecht op ΓB, welke twee loodlijnen elkaar mogen ontmoeten in Λ. Nu is $\Gamma HB\Lambda$ een koordenvierhoek, dus geldt

$$\angle \Gamma HB + \angle \Gamma\Lambda B = 2R$$

Echter is ook

$$\angle \Gamma HB + \angle \Lambda H\Delta = 2R$$

waaruit volgt

$$\angle \Gamma\Lambda B = \angle \Lambda H\Delta$$

Men weet hierdoor

$$\triangle \Gamma\Lambda B \backsim \triangle \Lambda H\Delta$$

dus

$$(B\Gamma,\ B\Lambda) = (\Delta\Lambda,\ \Delta H) = (B\Theta,\ EH)$$

of

$$(B\Gamma,\ B\Theta) = (B\Lambda,\ EH)$$

of, als K het snijpunt van $B\Gamma$ en $H\Lambda$ is,

$$(B\Gamma,\ B\Theta) = (BK,\ EK)$$

dus

$$(\Gamma\Theta,\ B\Theta) = (BE,\ EK)$$

of

$$[\mathbf{T}(\Gamma\Theta),\ \mathbf{O}(\Gamma\Theta,\ B\Theta)] = [\mathbf{O}(BE,\ \Gamma E),\ \mathbf{O}(EK,\ \Gamma E)] = [\mathbf{O}(BE,\ \Gamma E),\ \mathbf{T}(EH)]$$

Hieruit volgt met loslaten der meetkundige voorstelling

$$\mathbf{T}(\Gamma\Theta) \,.\, \mathbf{T}(EH) = \mathbf{O}(\Gamma\Theta,\ B\Theta) \,.\, \mathbf{O}(BE,\ \Gamma E)$$

dus, wegens (2)

$$\triangle AB\Gamma \,.\, \triangle AB\Gamma = \mathbf{O}(\Gamma\Theta,\ B\Theta) \,.\, \mathbf{O}(BE,\ \Gamma E).$$

Stellen we nu $\Gamma\Theta = s$ en de zijden van den driehoek a, b c, dan staat hier in moderne notatie te lezen

$$(\triangle AB\Gamma)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

VI. CONSTRUCTIE VAN EEN REGELMATIGEN ZEVENHOEK.

Volgens Arabische traditie heeft Archimedes een werk *Over den zevenhoek in een cirkel* geschreven. We kennen nu sinds enkele jaren uit Arabische bron [31]) een constructie voor een regelmatigen zevenhoek. Het is dus zeer wel mogelijk, dat deze van Archimedes afkomstig is. Zij berust op de volgende stelling:

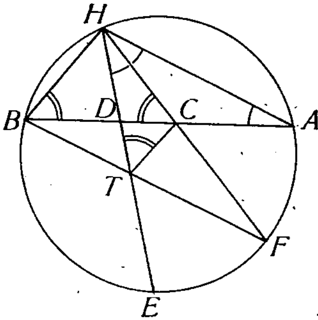


Fig. 171.

Zij gegeven (fig. 171) een recht lijnstuk AB en daarop twee punten C en D zoodat

$$\mathbf{O}(AD, CD) = \mathbf{T}(BD) \quad (1)$$
$$\mathbf{O}(CB, BD) = \mathbf{T}(AC) \quad (2)$$

Construeer nu $\triangle DHC$ zoo, dat $HD = BD$ en $HC = AC$

Construeer nu een cirkel door A, H, B, dan is in dezen cirkel BH zijde van den ingeschreven regelmatigen zevenhoek.

Bewijs: Laat HC en HD verlengd den cirkel opv. snijden in F en in E en laat BF HE in T ontmoeten.

Uit (1) volgt:

$$(AD,BD) = (BD,CD)$$

dus

$$(AD,DH) = (HD,DC)$$

dus

$$\triangle ADH \sim \triangle HDC$$

dus

$$\angle HAD = \angle CHD, \text{ dus bg } BH = \text{bg } FE = \text{bg } AF$$
$$(\text{wegens } CH = CA)$$

---

[31]) C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l Raihān ibn Ahmed Al-Bīrūm, dargestellt nach Al-Qānūn Al-Mas' ūdi.* Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von J. Ruska und H. Wieleitner. Hannover 1927, pag. 74 seq.

INHOUD VAN HET EERSTE DEEL.

INHOUD VAN HET TWEEDE DEEL.

Antwoorden ter perse.

Dit werk sluit aan op de leerstof van de Hogere burgerschool B, van het Gymnasium B, dus ook van het Staatsexamen B, van de Middelbare technische school en van de akte wiskunde L.O. Voldoende voorkennis verkrijgt men zeker, als men de beide delen Lagere Algebra van schrijver dezes doorwerkt.

Verschenen

MIDDEL-ALGEBRA

LEERBOEK VOOR AKTE-STUDIE EN INLEIDING TOT DE ANALYSE

DOOR

P. WIJDENES
AMSTERDAM

DERDE DRUK

DEEL I

396 blz., 149 figuren, 185 uitgewerkte voorbeelden
en bijna 400 vraagstukken.

Het werk in twee delen omvat de gehele stof voor het examen KI ter vervanging van de Beknopte Hogere Algebra, die uitverkocht is; voor de inhoud z.o.z.

Prijs deel I geb. f 10,50*

DEEL II TER PERSE

P. NOORDHOFF N.V. — 1943 — GRONINGEN-BATAVIA
OOK VERKRIJGBAAR DOOR DE BOEKHANDEL

Nu is dus $\angle BTH = \angle BCH$, dus is $BHCT$ een koordenvierhoek.

Wegens $DH = DB$, is ook $DC = DT$, dus $HT = BC$.

Uit (2) volgt:

$$(CB,AC) = (AC,BD)$$

waarvoor nu te schrijven is

$$(HT,HC) = (HC,HD)$$

zoodat $\triangle HTC \sim \triangle HCD$

dus $\angle HTC = \angle HCD$, dus $\angle HBA = \angle HCD = 2. \angle BAH$.

Dus is

bg $AH = 2.$ bg HB, waaruit het gestelde volgt.

Immers bg $HB = \frac{1}{2}$ bg $HA =$ bg $AF =$ bg $FE = \frac{1}{2}$ *bg* BE $= \frac{1}{7} \cdot 360$.

De regelmatige zevenhoek is dus te construeeren, wanneer C en D op AB zoo kunnen worden bepaald, dat aan de betrekkingen (1) en (2) voldaan is. Dit gelukt met behulp van een neusis, die echter van minder eenvoudigen aard is dan de inschuivingen van lijnstukken van bekende lengte, die we tot dusver alleen ontmoetten.

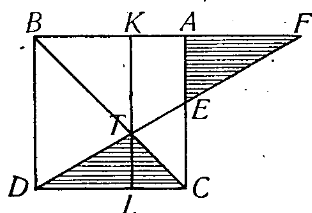


Fig. 172.

Laat $ABCD$ (fig. 172) een vierkant zijn (AB is niet het lijnstuk AB uit fig. 171). Trek door D een lijn, die CB in T, CA in E en het verlengde van BA in F ontmoet, zoodat

$$\triangle DTC \doteq \triangle AEF$$ [32])

Ontmoet nu de lijn door T evenwijdig met BD de zijden DC en BA opv. in L en K, dan is

$$\mathbf{O}(DC,\ TL) = \mathbf{O}(AF,\ AE)$$

of, wegens $TL = LC = AK$

$$\mathbf{O}(AB,\ AK) = \mathbf{O}(AF,\ AE)$$

waaruit in verband met $AB > AE$ volgt

$$AF > AK.$$

Verder is $(AB,AF) = (AE,TL) = (AF,LD)$

dus $$\mathbf{T}(AF) = \mathbf{O}(AB,\ BK) \qquad (1)$$

[32]) Het blijkt niet, hoe deze neusis wordt uitgevoerd. Ze kan uiteraard met behulp van kegelsneden verricht zijn.

Ook is $$(TL,TK) = (LD,KF) \ .$$

of $$(AK,KB) = (KB,KF)$$

dus

$$\mathbf{T}(KB) = \mathbf{O}(AK, KF) \tag{2}$$

Blijkens (1) en (2) is dus BF naar den eisch verdeeld. Deze verdeeling kan met behulp van scheeve projectie op het lijnstuk AB van fig. 171 worden overgedragen, waarbij met $B,K,A,F,$ resp. correspondeeren B,D,C,A.

Dr. C. DE JONG. †



Met ontroering zullen onze lezers kennis hebben genomen van de plotselinge dood op 4 Januari 1944 van den Heer de Jong. Met hem is een der meest bekende figuren uit de kringen van het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs heengegaan.

Geboren op 15 Februari 1893 te Gouda heeft hij echter het grootste deel van zijn leven in Leiden doorgebracht. Hier bezocht hij het Gymnasium en deed vanuit de vijfde klasse het Staatsexamen. Van 1910 tot 1915 volbracht hij zijn studie aan de Rijksuniversiteit te Leiden. Twee jaar later volgde zijn proefschrift: „Onderzoekingen omtrent de praecessieconstante en de stelselmatige eigenbewegingen der sterren", waarbij Prof. Dr. E. F. van de Sande Bakhuyzen als promotor optrad. Ondertusschen had de Heer de Jong in 1915 een gouden medaille verworven voor de beantwoording van een in 1914 door Rector en Senaat der Rijksuniversiteit uitgeschreven prijsvraag, waarbij werd gevraagd: „Een bepaling van de praecessieconstante en de stelselmatige eigenbewegingen der sterren uit te voeren door middel van een vergelijking van Küstner's catalogus van 10663 sterren met zone-catalogi der „Astronomische Gesellschaft", in de eerste plaats met de zone Berlin A en Rechte Klimming".

Ook de Regeering maakte gebruik van zijn kennis door hem te benoemen tot Ingenieur bij de Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing (1916—1923).

Onderwijl was de overledene reeds in 1915 leeraar aan het Gymnasium te Leiden geworden, waar hij enkele jaren tevoren nog leerling was geweest. In 1930 volgde zijn benoeming tot conrector.

Het behoeft geen betoog, dat een krachtige figuur als de Heer de Jong ook in het vereenigingsleven naar voren moest komen. Zoo zien we hem van 1925 met een onderbreking van vier jaar tot aan zijn dood als Bestuurslid van het Genootschap van Gymnasiumleeraren, eerst als Penningmeester, later als Voorzitter. Het spreekt vanzelf, dat, toen de Raad van Leeraren door de samenwerkende organisaties in het leven werd geroepen, hij ook hiervan lid was.

En thans komen wij tot de kwaliteit, in welke hij vooral voor onze lezers bekend is geworden, nl. als Voorzitter van Liwenagel. De Heer Verrijp, met den Heer Vinkesteyn, een der grondleggers van het Gymnasium B, had indertijd de stoot gegeven tot de oprichting van de organisatie Liwenagel als Groep van het Genootschap, teneinde de belangen van de Wiskunde en de Natuurwetenschappen aan het Gymnasium te behartigen. Bij het verlaten van het Onderwijs vestigde Verrijp de aandacht op den Heer de Jong, om zijn belangrijk werk voort te zetten. In verband daarmede zien we sinds 1934 den laatste ook dit voor zijn rekening nemen. Als zoodanig trad hij o.a. op als Voorzitter van de belangrijke congressen, die door de Vereenigingen Liwenagel, Wimecos, Velines en Velibi werden georganiseerd. Altijd stond hij klaar, om van zijn belangstelling voor de Wiskunde en aanverwante vakken te doen blijken. Nog in de laatste Kerstvacantie was hij op de Algemeene Vergaderingen der beide Wiskunde-vereenigingen aanwezig!

Ook de Regeering erkende zijn groote verdiensten door hem tot Ridder in de Orde van Oranje-Nassau te benoemen. Verder was hij Officier de l'Académie française.

Jarenlang was hij voorts een der bekendste leden van de Staatsexamencommissie. Ook zijn van zijn hand eenige leerboeken in samenwerking met anderen verschenen.

Dat zijn belangstelling zich ook tot onderwerpen buiten het onderwijs uitstrekte, moge uit een enkel voorbeeld blijken: gedurende een aantal jaren was hij Voorzitter van de Afdeeling Leiden van de Maatschappij voor Toonkunst.

En thans is aan dit zoo goed bestede leven plotseling een einde gekomen. In onze herinnering zal de Heer de Jong echter voort blijven leven als de zeer krachtige, onkreukbare figuur, die hij zich steeds heeft getoond! Dat zijn dood voor zijn gezin een onherstelbaar verlies is, behoeft geen betoog! Ook het Gymnasiaal Onderwijs verliest in hem echter een man, dien het uiterst moeilijk zal kunnen vervangen, daar zijn bekwaamheid, prestige en leiding geven hem bij uitstek voor zijn veelzijdige taak geschikt maakten! Moge de groote waardeering, die hij overal in den lande genoot, zijn Echtgenoote en Kinderen althans eenige troost schenken in het groote leed, dat zoo totaal onverwacht hun deel geworden is!

J. J. TEKELENBURG.

OVER MEETKUNDE EN EEN ENKEL PUNT IN HET BEGINNEND ACADEMISCH ONDERWIJS DAARIN[1])

DOOR

W. VAN DER WOUDE.

§ 1. Aan de uitnoodiging, die ik de eer had van het Bestuur van *Wimecos* te ontvangen, was een zeer begrijpelijke en tevens zeer voorzichtig gestelde wensch verbonden. Aan die wensch te voldoen, voorzoover mij dat mogelijk is, is geheel in overeenstemming met mijn voornemen.

Ik bedoel, dat Uw Bestuur mij geheel vrij liet in de keuze van mijn onderwerp, maar het waardeeren zou, indien deze voordracht een eenigszins didactisch karakter mocht dragen. Nu stel ik levendig belang in de didactiek der wiskunde, maar ik vraag mij af, of ik niet te lang uit het leeraarsambt ben om U allen over dat bedrijf iets voor te houden, dat het aanhooren en overdenken waard is. Maar wat ik gaarne zal doen is daarmee nauw verwant. Ik stel mij voor enkele, natuurlijk persoonlijke, maar naar ik hoop door meerderen gedeelde overdenkingen over het karakter van en het onderwijs in de meetkunde uit te spreken en die met voorbeelden te illustreeren. Die voorbeelden echter ontleen ik aan het emplooi, waar ik juist ben uitgetreden. Ze behoren in dat nog zeer elementaire deel der meetkunde, dat voor het candidaatsexamen a in de faculteit der wis- en natuurkunde onderwezen wordt. Ten slotte hoop ik nog even de aandacht te vestigen op een bijzonderheid waarop men gewoonlijk niet heel diep ingaat.

§ 2. Om te beginnen, ik zal geen partij kiezen in de strijd over de vraag: „wat is wiskunde"? Wel interesseert mij thans de vraag: wat is meetkunde?

Onder de indruk van de voortdurende uitbreiding aan het begrip „meetkunde" gegeven, en de moeilijkheid daarna steeds opnieuw

[1]) Voordracht, gehouden op 28 December te Amsterdam voor de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (Wimecos).

dat begrip passend te definieeren, heeft een mijner collega's voor enkele jaren in zijn rectorsrede de uitspraak aangehaald: „meetkunde is tegenwoordig alles, wat een man van gezag meetkunde belieft te noemen." Hij kon zich kennelijk min of meer met die uitspraak vereenigen. Ik kan dat minder goed, al waardeer ik haar als uiting van humor met een tikje waarheid.

Liever antwoord ik op de vraag: wat *noemt* men meetkunde? Omdat ik op medestanders reken, antwoord ik dan: „*wij* noemen meetkunde . . ."

Derhalve: „wij noemen meetkunde" — of nog liever „wij gevoelen als meetkunde" „dat deel der wiskunde, waarin nog iets is overgebleven van de aanschouwelijkheid, die vroeger het kenmerk was der meetkunde, toen zij nog synoniem was met ruimtebeschrijving".

Ik verwacht niet dat iedereen zich hierdoor bevredigd zal gevoelen, evenmin door deze als door een andere definitie. Maar deze heeft tenminste het voordeel, dat zij het gevoelselement, dat hier optreedt, onverholen uitspreekt; en verder dat zij dat bijzondere in de meetkunde noemt, dat in onze jeugd ons trof en haar voor ons aantrekkelijk maakte en dat thans nog doet, hoe groot de ommekeer moge zijn in onze meening over het verband tusschen redeneering en aanschouwing.

§ 3. Het is het meetkunde-onderwijs, waarover ik verder een paar opmerkingen wensch te maken. Men kan aan de Universiteit beginnen met een axiomatische inleiding of aan de grondbegrippen „punt", „rechte lijn", „loodrechte stand" enz. zoo spoedig mogelijk een algebraïsche beteekenis geven; daarom bekommer ik mij thans niet. Ik heb het oog op de eerste uitbouw en de illustratie daarvan.

Hoe wij haar ook inleiden, wij houden ons voorloopig bezig met algebraïsche meetkunde, gemakkelijk te qualificeeren als invariantentheorie van de een of andere groep. Men zegt hierbij soms: „meetkunde is algebra, geïllustreerd door een figuurtje". Niet tegen te spreken; als men er slechts bij bedenkt: slechts dat deel der algebra aanvaarden wij als meetkunde, dat zich aanschouwelijk laat illustreeren, dat is dus het deel, dat afgebeeld kan worden op onze ruimte, dat dus tevens onze verbeelding en ons leven direct treft.

§ 4. Laat ik even duidelijk zeggen, dat ik persoonlijk geen voorkeur voor de meetkunde boven andere takken der wiskunde heb. Maar zij heeft wel voor mij een eigen karakter; en dat brengt

voor mij eenige didactische consequenties mee. De eerste, die ik noem, kan ook een didactische inconsequentie heeten.

Ik las van tijd tot tijd, dat een schrijver, de een of andere kwestie besprekende, zegt aan een in zijn schema passende oplossing de voorkeur te geven boven een andere kortere, die op een minder algemeene methode berust. Ik begrijp dat standpunt, maar heb twee opmerkingen.

Ten eerste: onder een minder algemeene methode moet vaak worden verstaan een minder algemeen bekende of een minder tot algemeenheid uitgewerkte methode. Maar ten tweede: bij mondeling onderwijs, colleges, heb ik vaak een zwak voor een *niet* in het systeem passende oplossing of voor een opmerking, die niet geheel in de lijn ligt maar dikwijls de beschouwde zaak (figuur) van een andere kant belicht. Zoo'n stukje, dat volgens de leerling uit de lucht valt, heeft iets prikkelends, soms iets fantastisch. Ik geef een enkel, uiterst eenvoudig, voorbeeld uit mijn eigen liefhebberijen:

I. (de lijn van Euler, afgeleid uit een ruimtefiguur bij de axonometrie). [1])

Bij mondeling onderwijs kan ik dus eenige inconsequentie licht verdragen.

Van meer belang is het volgende. De meetkunde beschikt voor haar doel onbeperkt over algebra en analyse. Zooals ik reeds zei, kan men voorloopig zeggen: zij *is* algebra. Maar voor het oogenblik heb ik het oog op de meetkunde in de ruimste zin. Hierbij doet zich iets eigenaardigs voor.

Soms zijn de berekeningen vrij lang en het doel niet dadelijk of gemakkelijk te zien. Des te sterker kunnen dan de resultaten treffen. Laat ik als voorbeeld noemen de praestaties van Gausz in de oppervlakkentheorie: de invariantie van de totale kromming bij verbuiging, de som der hoeken van een geodetische driehoek enz. Dat heeft voor mij iets romantisch.

Terugkeerend tot mijn uitgangspunt vraag ik: waar zit in onze elementaria het element van verrassing? Weer een vraag, waarop geen eensluidende antwoorden te verwachten zijn. Mij hebben indertijd eerst de synthetische methoden van Chasles en Jacob Steiner verrast, het spel van projectieve puntreeksen en stralen- en vlakkenbundels en verdere correspondenties. Later heeft de ana-

[1]) Dit voorbeeld en de volgende werden door den spreker op een bord toegelicht. Zie het „Naschrift".

lytische behandeling mij eerst geheel bevredigd en door haar algemeenheid en soepelheid, het werk van Moebius, Plücker, Hesse e.a., in bewondering gebracht. Maar hoe dan ook ingeleid, er is één hoofdstuk, dat mij bijzonder trof en waaraan ik vele jaren later gaarne voorbeelden heb ontleend: de projectieve behandeling der metriek. Het verrassend element, dat voor mij daarin ligt, kan ik weer het best door een paar voorbeelden toelichten. Ik heb daarbij vooral het oog op de sluitingsstellingen.

II. Voorbeelden: een cirkel beschreven om een driehoek, om een parabool beschreven, gaat door het brandpunt van die parabool; liggen op een quadratische kegel drie onderling loodrechte lijnen, dan liggen oneindig veel dergelijke drietallen op die kegel.

Maar de sterkste bekoring, ook in hare toepassingen — ik laat het natuurlijk bij de eenvoudigste — heeft voor mij de stelling van den jeugdigen Laguerre, aanvankelijk in mijn oogen een soort tooverformule:

$$\angle a, b, = \frac{1}{2i} \log (b, a, \text{OI}, \text{OJ}).$$

(O is het hoekpunt, snijpunt van a en b).

III. Voorbeelden: twee hoeken aan de omtrek van een cirkel, die op dezelfde boog staan, zijn gelijk. Gelijkwaardig met:

Vier punten van een kegelsnee worden uit twee punten der kegelsnee geprojecteerd in vier stralen met dezelfde dubbelverhouding.

Som der hoeken van een driehoek $= \pi$ met uitbreiding op een n-hoek. Hieruit:

Stelling van Menelaus.

§ 5. Hiermee nader ik mijn slot. Ik zou nog eens willen wijzen op het eigenaardige feit, dat voor onze leerlingen naar mijn ondervinding bepaalde vraagstukken bij een analytische behandeling een zekere moeilijkheid schijnen te hebben. Voor niet academici zal dat wel in niet mindere mate het geval zijn.

Ik bedoel vraagstukken, die de oplosser uitnoodigen, bijna verplichten, tot gebruik van projectieve coördinaten, terwijl in de opgave metrische elementen voorkomen (zie bv. in de „Nieuwe Opgaven" verschillende vraagstukken, door Schaake, van der Woude e.a. gesteld). Die moeilijkheid verdwijnt door aan die elementen hun projectieve beteekenis te geven. Natuurlijk geven onze goede leerboeken een theoretische grondslag, die daarvoor

ruim voldoende is, maar voor de practijk zou misschien een enkele vingerwijzing nog wel dienstig kunnen zijn.

IV. Voorbeeld: de orthogonale hyperbool (van Lemoine?) door de hoekpunten van een driehoek, verder door het hoogtepunt, het middelpunt van de ingeschreven cirkel en het punt van Gergonne.

Vraagt men mij nu of ik een aanvulling wensch van de toch reeds vrij omvangrijke leerboeken en of ik een groote beteekenis toeken aan die eenvoudige voorbeelden, waarover ik hier met eenige uitvoerigheid heb gesproken, dan antwoord ik op de eerste vraag: „volstrekt niet". Maar wat de tweede betreft: enkele eenvoudige vraagstukken hebben altijd eenige didactische waarde. Bovendien meen ik, dat vele leerlingen van het aesthetisch element, dat de meetkunde zoo sterk eigen is, iets gevoelen in deze „sommetjes". Mocht ik mij daarin hebben vergist, dan hebben ze tenminste meegewerkt mij het college-geven tot een genot te maken.

NASCHRIFT.

Op verzoek van de Redactie herhaal ik hier de toelichting bij de in de tekst gegeven voorbeelden.

I. In elk leerboek der Stereometrie vindt men de volgende beide vraagstukken:

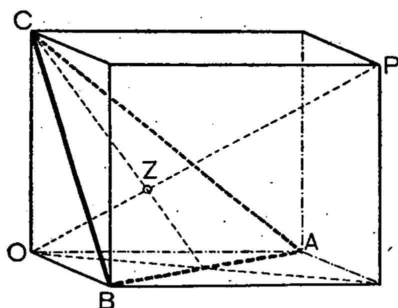


Fig. 1.

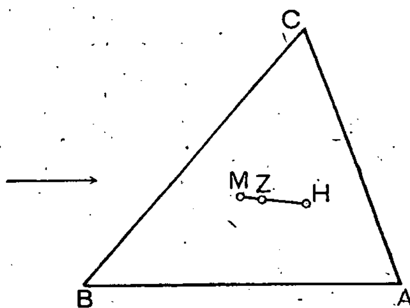


Fig. 2.

1. „Laat O(A,B,C) een drievlakshoek zijn, waarvan de ribben OA, OB, OC loodrecht op elkaar staan, en H de projectie van O op het vlak ABC, dan is H het hoogtepunt van △ ABC."

2. „OA, OB, OC zijn drie ribben van een rechthoekig parallelo-

pipedum, OP is een lichaamsdiagonaal. Snijdt OP het vlak ABC in Z, dan is Z het zwaartepunt van △ ABC en OZ = $\frac{1}{3}$ OP."

Projecteert men nu bij dit tweede vraagstukje OP op het vlak van △ ABC, dan projecteert O zich in het hoogtepunt H van △ ABC, Z blijft op zijn plaats, terwijl het midden van OP zich projecteert in het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van △ ABC. Derhalve liggen H, Z en M op een rechte lijn met HZ = 2ZM. (E u l e r).

II. Aan de bedoelde sluitingsstellingen kan men eenigszins verschillende vormen geven.

Gewoonlijk bewijst men eerst:

„Als twee driehoeken om een zelfde kegelsnee beschreven zijn, dan liggen de 6 hoekpunten op een zelfde kegelsnee".

Hieruit volgt dadelijk:

„Is een kegelsnee α beschreven om een driehoek, beschreven om een kegelsnee π, dan zijn er oneindig veel driehoeken, in α en om π beschreven".

Als een tweede sluitingsstelling bewijst men:

„De hoekpunten van twee pooldriehoeken van een kegelsnee γ liggen op een kegelsnee α"; waaruit weer volgt:

„Is een kegelsnee α beschreven om een pooldriehoek van een kegelsnee γ, dan is α beschreven om oneindig veel pooldriehoeken

Fig. 3.

van γ". Voor de toepassing van de eerstgenoemde stelling wordt er aan herinnerd,

a. dat elk paar elkaar in een punt O snijdende onderling loodrechte lijnen harmonisch gescheiden worden door OI en OJ. Hierbij

worden met I en J bedoeld de beide isotrope punten, d.w.z. de beide snijpunten van elke cirkel met l_∞; OI en OJ hebben dus de richtingscoëfficiënten i en $-i$, waaruit deze harmonische scheiding dadelijk volgt.

b. Is F het brandpunt van een parabool π, dan zijn FI en FJ de raaklijnen uit F aan π.

Als toepassing van de eerste sluitingsstelling werd nu gegeven: *„Is △ ABC omgeschreven om een parabool π, dan gaat de omgeschreven cirkel van die driehoek door het brandpunt F".*

Immers △ ABC en △ FIJ zijn twee driehoeken om π beschreven, en dus liggen de 6 hoekpunten op een kegelsnee; deze is een cirkel, omdat hij door I en J gaat.

Ter verduidelijking werden hierbij in de figuur eerst door een projectieve transformatie l_∞ in een willekeurige rechte l', I en J, in twee punten I′ en J′ van l', π in een l' rakende kegelsnede π' overgebracht.

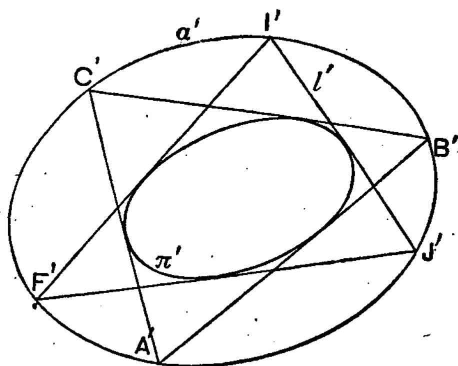


Fig. 4.

Om tot een voorbeeld voor de tweede sluitingsstelling te komen werd weer eerst gewezen op de beteekenis der isotrope rechten in de ruimte.

Laat O een willekeurig punt zijn, dan bestaat er een quadratische kegel G met O als top, die door een willekeurig vlak W door O in twee isotrope rechten gesneden wordt, welke beide rechten elk paar onderling loodrechte lijnen door O in W harmonisch scheiden.

Deze opmerking leidt dan dadelijk tot een bekende stelling over een quadratische kegel, waarop drie onderling loodrechte beschrijvenden liggen.

Laat K die kegel zijn, O zijn top en OX, OY, OZ het bedoelde orthogonale drietal; met de punten X, Y, Z bedoel ik verder de snijpunten van deze rechten met het vlak V_∞. Laat verder het vlak V_∞ de kegels G en K respectievelijk in de kegelsneden γ en k snijden. Dan zegt het gegeven, dat $\triangle$ XYZ een pooldriehoek is van γ en dat dus k beschreven is om een pooldriehoek van γ. Maar dan volgt uit de tweede sluitingsstelling, dat k beschreven is om on-

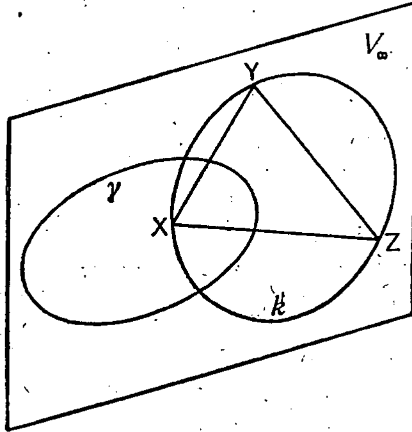


Fig. 5.

eindig veel pooldriehoeken van γ, dus dat op K oneindig veel orthogonale drietallen beschrijvenden liggen. Wij hebben dus bewezen:

„Liggen op een quadratische kegel drie onderling loodrechte beschrijvenden, dan liggen op K oneindig veel drietallen onderling loodrechte beschrijvenden".

III. Als uitgangspunt van een projectieve meetkunde der kegelsneden kan men nemen:

„Vier punten P_1, P_2, P_3, P_4 van een kegelsnee α worden uit twee harer punten S_1 en S_2 geprojecteerd in twee stralenviertallen, die dezelfde dubbelverhouding bepalen; d.w.z.

$$S_1\ (P_1, P_2, P_3, P_4) = S_2\ (P_1, P_2, P_3, P_4)".$$

Gevraagd: waar blijft die fundamenteele stelling bij ons H.B.S.-onderwijs, dat zich met de cirkel bezig houdt.

Neemt men voor α een cirkel en als de punten P_3 en P_4 de punten J en I, dan is weer

$$S_1\ (P_1, P_2, J, I) = S_2\ (P_1, P_2, J, I),$$

dus ook

$$\frac{1}{2i} \log.\ S_1\ (P_1, P_2, J, I) = \frac{1}{2i} \log.\ S_2\ (P_1, P_2, J, I).$$

Volgens de stelling van L a g u e r r e is dan

$$\angle P_1 S_1 P_2 = \angle P_1 S_2 P_2,$$

d.w.z. twee hoeken aan de cirkelomtrek, die op dezelfde boog staan, zijn gelijk.

Voor een tweede toepassing ga ik uit van de stelling over de hoeken van een $\triangle$ ABC:

$$A + B + C = \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Met a, b, c bedoel ik de zijden (niet hunne lengten) van de driehoek, met i_1 en j_1 de rechten AI en AJ, met i_2, j_2 en i_3, j_3 de rechten BI, BJ en CI, CJ.

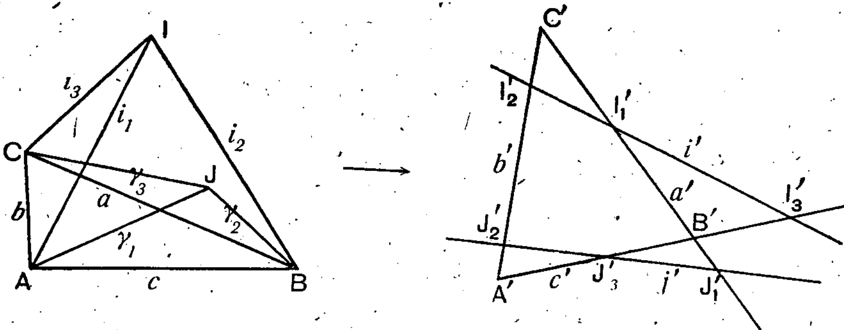


Fig. 6.

Volgens L a g u e r r e zegt (1):

$$\frac{1}{2i}\{\log (b, c, j_1, i_1) + \log (c, a, j_2, i_2) + \log (a, b, j_3, i_3)\} = \pi$$

derhalve

$$(b, c, j_1, i_1)\ (c, a, j_2, i_2)\ (a, b, j_3, i_3) = e^{2\pi i} = 1.$$

Daar de dubbelverhoudingen door projectieve transformatie niet veranderen kan ik nu I en J in twee willekeurige punten van het vlak doen overgaan.

In plaats van deze figuur neem ik nu de aan haar duaal toegevoegde (de poolfiguur t.o.v. een kegelsnee). Ik vind dan een $\triangle$ A′B′C′, wiens zijden door twee willekeurige rechten i' en j' gesneden worden, resp. in de punten I_1', I_2', I_3' en J_1', J_2', J_3', waarbij (als ik voor het gemak de accenten weglaat)

$$(B, C, J_1, I_1)\ (C, A, J_2, I_2)\ (A, B, J_3, I_3) = 1.$$

Neem ik voor j' de rechte l_∞, dan vind ik

$$\frac{BI_1}{CI_1} \times \frac{CI_2}{AI_2} \times \frac{AI_3}{BI_3} = 1,$$

de stelling van M e n e l a u s.

Even gemakkelijk had de analoge stelling voor de lengten der segmenten, die een willekeurige rechte van de zijden van een n-hoek afsnijdt, afgeleid kunnen worden. (Stelling van C a r n o t, volgens G. D a r b o u x: Principes de Géométrie Analytique, p. 144).

IV. Laat I het middelpunt zijn van de ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC; de raakpunten op de zijden heeten A^+, B^+, C^+. Men neemt op IA^+, IB^+, IC^+ punten P, Q, R, waarbij

$$IP = IQ = IR = \lambda$$

(deze segmenten gemeten van I naar de raakpunten). Gevraagd

1o. te bewijzen, dat AP, BQ, CR elkaar in een zelfde punt K snijden;

2o. de meetkundige plaats te bepalen van K, als λ veranderlijk is.

Natuurlijk is dit een uiterst eenvoudig vraagstukje.

Neemt men λ veranderlijk, dan beschrijven AP en BQ projectieve stralenbundels en brengen dus een kegelsnee voort door de toppen

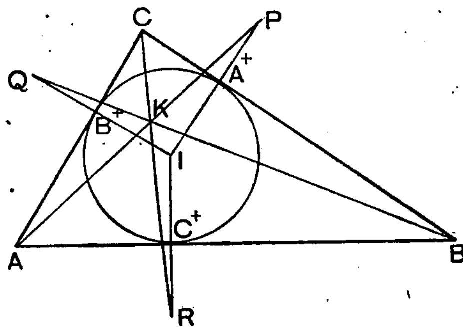


Fig. 7.

A en B der stralenbundels. Verder ziet men dadelijk, dat op die kegelsnee liggen het punt I ($\lambda = 0$), het hoogtepunt H ($\lambda = \infty$) het snijpunt G van AA^+ en BB^+ ($\lambda = r$); gemakkelijk vindt men nog het punt C. Hieruit volgt:

1o. de stralenbundels AP en CR of BQ en CR brengen dezelfde kegelsnee voort, dus AP, BQ en CR gaan steeds door een zelfde punt K;

2o. die kegelsnee is een orthogonale hyperbool, daar zij door A, B, C en H gaat; verder liggen nog I en G op haar.

Men kan nu echter vragen: waar ligt voor de jeugd bij analytische behandeling de moeilijkheid? hoe kan men die overwinnen? Hierover werd een korte opmerking gemaakt.

DE GRAFISCHE VOORSTELLING VAN DE GEBROKEN KWADRATISCHE FUNCTIE[1])

DOOR

Dr. C. J. VAN GRUTING.

De wijze, waarop de grafische voorstelling van de functie

$$\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

in de leerboeken voor het middelbaar onderwijs wordt behandeld, is in vele opzichten onbevredigend.

Het doel van dit artikel is U een methode te geven, waarvan de resultaten enige voordelen bezitten, die met de thans gebezigde methode niet kunnen worden verkregen.

Om onnodige uitweidingen te voorkomen geef ik U een inleiding, die enige kennis van de analytische meetkunde veronderstelt. Daarna wordt nagegaan, welke voorbereiding de leerlingen behoeven voor de behandeling van dit onderwerp. Tot besluit volgt dan de bepaling van de vergelijkingen van de asymptoten en de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de asymptoot evenwijdig met de x-as, hetgeen voert tot de resultaten, die met de methode worden beoogd.

§ 1. De kromme, waarvan de vergelijking is

$$(px^2 + qx + r)\ y - (ax^2 + bx + c) = 0,$$

waarin uitdrukkelijk wordt verondersteld $p \neq 0$, is van de derde graad en snijdt dus de oneindig ver gelegen lijn in drie punten, waarvan er één valt in het oneindig verre punt van de x-as en de beide andere in het oneindig verre punt van de y-as, dat dus een dubbelpunt van de kromme is. De kromme heeft dus één asymptoot, die evenwijdig is met de x-as (de horizontale asymptoot genaamd) en twee asymptoten, die evenwijdig zijn met de y-as (de

[1]) Voordracht, gehouden op 28 Dec. 1943 te Amsterdam voor „Wimecos".

verticale asymptoten genaamd), want zij zijn de raaklijnen van de kromme in het dubbelpunt.

Omdat een raaklijn in het dubbelpunt de kromme snijdt in drie punten, die in het dubbelpunt vallen, snijdt iedere verticale asymptoot de kromme in geen enkel ander punt; de horizontale asymptoot snijdt de kromme in twee punten, die vallen in het oneindig verre punt van de x-as en dus nog in één ander punt, dat wij in het vervolg het punt S zullen noemen. In het speciale geval, dat S ook in het oneindig verre punt van de x-as valt, is dit punt een buigpunt van de kromme.

Is $D_n = q^2 - 4pr$ de discriminant van de vorm $px^2 + qx + r$, dan onderscheiden wij de volgende gevallen:

I. Het dubbelpunt is een knooppunt; $D_n > 0$. De verticale asymptoten, die bestaanbaar zijn, snijden de horizontale asymptoot achtereenvolgens in de punten A en B; de onderverdeling van dit geval is dan:

a. S ligt op het lijnsegment AB.

b. S ligt niet op het lijnsegment AB.

c. S is het oneindig verre punt van de horizontale asymptoot.

II. Het dubbelpunt is een keerpunt; $D_n = 0$. De verticale asymptoten zijn bestaanbaar, maar vallen samen; de onderverdeling van dit geval is:

a. S is een willekeurig punt van de horizontale asymptoot.

b. S is het oneindig verre punt van de horizontale asymptoot.

III. Het dubbelpunt is een geïsoleerd punt; $D_n < 0$. De verticale asymptoten zijn onbestaanbaar.

a. S is een willekeurig punt van de horizontale asymptoot.

b. S is het oneindig verre punt van de horizontale asymptoot.

§ 2. Om een inzicht te krijgen in het gedrag van een kromme in de buurt van een oneindig ver gelegen punt U′ ten opzichte van de asymptoot in U′, beschouwen wij de centrale projectie van punten van een vlak V (op fig. 1 ABC) op een vlak W (op fig. 1 A′B′C′). Van ieder punt P van V is de centrale projectie P′ te bepalen met uitzondering van de punten van de snijlijn van V met het vlak W′ (OUE) dat door het centrum 0 gaat en evenwijdig is met het vlak W, omdat dan iedere lijn OP evenwijdig is met het vlak W. Deze snijlijn (V, W′) wordt de verdwijnas genoemd; de punten van de verdwijnas projecteren zich dus in oneindig ver gelegen punten van het vlak W.

Zijn B en C punten van (V, W) en A een punt van V, zodat de lijnsegmenten AB en AC de verdwijnas snijden, D een willekeurig punt van het lijnsegment BC en P en Q punten van AD, die niet aan een zelfde kant van de verdwijnas liggen, dan blijkt uit de centrale projectie van de punten A, P en Q, dat P′ en Q′ niet aan een zelfde kant van A′B′ liggen. (Figuur 1).

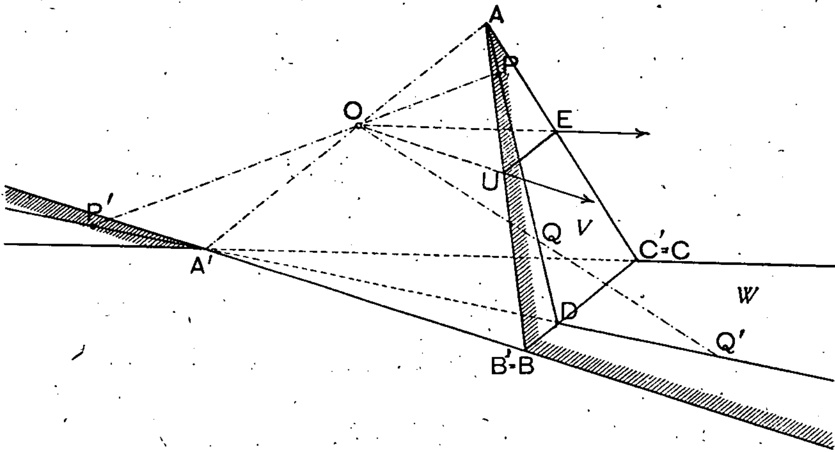
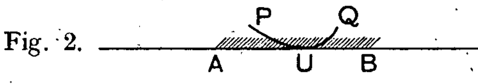


Fig. 1.

Omdat bij ieder punt van het vlak V één punt van het vlak W behoort, dat de centrale projectie van dat punt is, zal het zonder meer duidelijk zijn, dat de raaklijn van een kromme in V tot pro-

Fig. 2. 

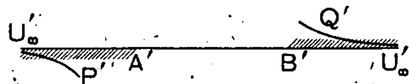
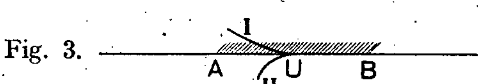


Fig. 3. 

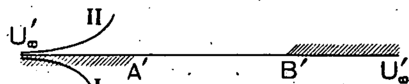
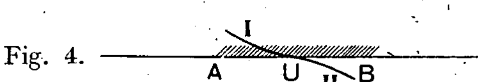
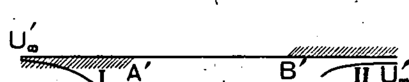


Fig. 4. 



jectie heeft de raaklijn van de projectie van de kromme in de projectie van het raakpunt, dat de projectie van een dubbelpunt een zelfde soort dubbelpunt is en de projectie van een buigpunt een buigpunt.

Snijdt de lijn AB de verdwijnas in U en bepalen wij de projectie van een kromme, die door de punten P en Q gaat en in U raakt aan

AB, dan zal van de projectie van de kromme de tak $P'U'_\infty$ raken aan $A'U'_\infty$ en de tak $Q'U'_\infty$ aan $B'U'_\infty$, maar deze takken liggen aan verschillende kanten van A'B'. (Figuur 2).

De raaklijnen in een knooppunt zijn te beschouwen als raaklijnen, die in het raakpunt nog een snijpunt met de kromme gemeen hebben, zodat wij dit geval niet afzonderlijk behoeven te beschouwen.

Is AB de keerpuntsraaklijn van een kromme in U, dan liggen van de projectie van de kromme de twee takken aan verschillende kanten van A'B', maar zij naderen tot hetzelfde lijnsegment $A'U'_\infty$. (Figuur 3).

Is AB de buigpuntsraaklijn van een kromme in het punt U, dan zullen van de projectie van de kromme de twee takken aan dezelfde kant van A'B' liggen. (Figuur 4).

§ 3. Wij zijn nu in staat de schets van het verloop van de kromme te geven in ieder van de in § 1 genoemde gevallen, als de positie van het punt S ten opzichte van de asymptoten bekend is en wij nog één ander punt van de kromme kennen.

§ 4. Bij de bepaling van de extreme waarden van de gebroken kwadratische functie is het vaststellen van de positie van het punt S eveneens van belang, omdat wij in verband met de voorwaarden, dat de extremen eindige waarden van de functie zijn voor eindige waarden van de variabele, dan onmiddellijk kunnen aangeven, hoeveel extremen de functie heeft.

Om dit aan te tonen, veronderstellen wij in

$$\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

de coëfficient a gelijk nul, dus doen wij de horizontale asymptoot samenvallen met de x-as, hetgeen aan de algemeenheid van het bewijs niets afdoet; snijdt de kromme de horizontale asymptoot in het punt S (x_1, o), dan is (1) te schrijven

$$y = \frac{b(x - x_1)}{px^2 + qx + r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bepalen wij de extremen op de wijze, die op de middelbare scholen gebruikelijk is, dus door middel van de raaklijnen evenwijdig aan de x-as, dan vinden wij, dat de y-coördinaten van de raakpunten,

dus de extremen van de functie, de wortels zijn van de vergelijking:

$$D_y = (q^2 - 4pr)\, y^2 - 2b(q + 2px_1)\, y + b^2 = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

waarvan de discriminant

$$D' = 4b^2 \{(q + 2px_1)^2 - (q^2 - 4pr)\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Is nu $D_n = q^2 - 4pr > 0$ en zijn A (x_2, o) en B (x_3, o) de snijpunten van de asymptoten, dan is

$$px^2 + qx + r = p\,(x - x_2)\,(x - x_3),$$

zodat $q = -p\,(x_2 + x_3)$ en $D_n = p^2\,(x_2 - x_3)^2$, dus

$$D' = 4b^2p^2\{(x_2 + x_3 - 2x_1)^2 - (x_2 - x_3)^2\} = 16b^2p^2(x_2 - x_1)(x_3 - x_1).$$

In het geval Ia $(x_2 < x_1 < x_3)$ is $D' < 0$, dus heeft de functie geen bestaanbare extreme waarden en in het geval Ib $(x_1 < x_2 < x_3$ of $x_2 < x_3 < x_1)$ is $D' > 0$, zodat de functie dan twee bestaanbare extreme waarden heeft.

Vallen de verticale asymptoten samen, is dus $D_n = 0$, dan is de vergelijking $D_y = 0$ van de eerste graad in y en heeft dus één wortel oneindig groot, zodat de functie in het geval IIa slechts één extreme waarde heeft.

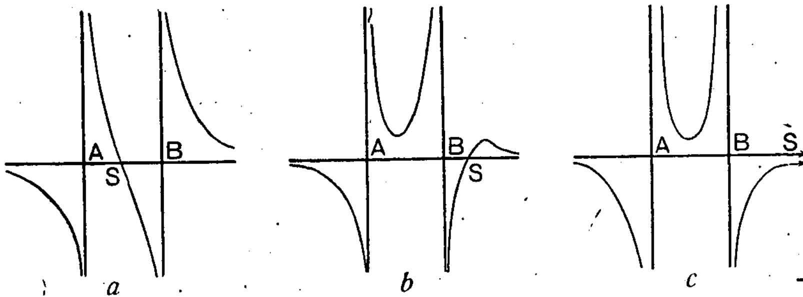


Fig. 5. Het geval van een knooppunt.

Zijn de verticale asymptoten onbestaanbaar, dan volgt uit $D_n < 0$ onmiddellijk, dat $D' > 0$ is; in het geval IIIa heeft de functie dus twee bestaanbare extreme waarden.

In de gevallen, waarin het punt S oneindig ver ligt, is in de veronderstelling, dat de horizontale asymptoot met de x-as samenvalt, in de vergelijking (1) $a = b = 0$ en vinden wij

$$D_y = (q^2 - 4pr)\, y^2 + 4pc\, y = 0,$$

zodat dan één van de wortels der vergelijking nul is; nu is echter $y = 0$ voor $x = \infty$, zodat de functie voor die waarde van x niet extreem is.

In de gevallen Ic en IIIb vinden wij dus één extreem en in het geval IIb geen enkele.

§ 5. Het is duidelijk, dat de in § 1 gegeven uiteenzetting zonder een behoorlijke voorbereiding de krachten van de leerlingen der middelbare scholen verre te boven gaat en velen zullen zich afvragen of het in verband met de tijd die voor het onderwerp ter beschikking is, mogelijk is de leerlingen iets hiervan te geven.

Ik ben van mening, dat dit wel mogelijk is, al geef ik grif toe,

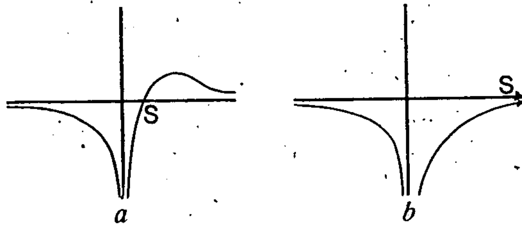


Fig. 6. Het geval van een keerpunt.

dat er veel meer tijd mee gemoeid is, dan benodigd is voor de wijze, waarop het onderwerp gewoonlijk wordt afgehandeld. Er staat echter tegenover, dat de behandeling van de functies, die wij verkrijgen voor de gevallen $a = p = 0$ en $p = 0$, als bijzondere gevallen kunnen beschouwen.

In de volgende paragraaf deel ik U mede, op welke wijze ik mij de voorbereiding van de leerlingen denk.

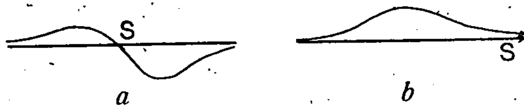


Fig. 7. Het geval van een geïsoleerd punt.

§ 6. Wij veronderstellen, dat de leerlingen op de hoogte zijn van de bepaling van de grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ en dat zij dus onder meer de betekenis kennen van het vinden van onbestaanbare wortels van een vergelijking in verband met de bepaling van de coördinaten van de snijpunten van een rechte lijn en een grafiek. Veronderstellen wij nu tevens, dat het hun bekend is, dat een vergelijking van de derde graad met één onbekende drie wortels heeft, die alle reëel zijn of waarvan er één reëel is en de beide andere onbestaanbaar, dan bestaat de voorbereiding uit de volgende onderwerpen:

1. Verklaring van de betekenis van een punt, waarvan één of beide coördinaten oneindig groot zijn en de invoering van het begrip „het oneindig ver gelegen punt van een lijn”.

2. Bepaling van de voorwaarden, waaraan de coëfficienten van een vergelijking van de graad n met één onbekende moeten voldoen, opdat de vergelijking p wortels oneindig groot heeft.

3. Bepaling van de raaklijnen in een dubbelpunt van een kromme en van de raaklijn in een buigpunt.

Wij geven hier in het kort de wijze van behandeling van deze onderwerpen.

1. Is S (x_1, y_1) het snijpunt van de lijnen, waarvan de vergelijkingen zijn

$$a_i x + b_i y + c = 0 \ (i = 1, 2), \text{ dan is } x_1 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\text{en } y_1 = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1};$$

zijn alle coëfficienten ongelijk nul, dan is $x_1 = \infty$, als

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

is, maar dan is tevens $y_1 = \infty$; in dit geval zijn de lijnen evenwijdig, zoals blijkt uit de gelijkheid van de richtingscoëfficienten.

Veronderstellen wij nu $b_1 = 0$ en $a_1 \neq 0$, dan is $x_1 = -\frac{c_1}{a_1}$ en $y_1 = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2}$, dus heeft x_1 steeds een eindige waarde en is $y_1 = \infty$ als $b_2 = 0$ en $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$; maar dan zijn de vergelijkingen van de lijnen $a_1 x + c = 0$ en $a_2 x + c_2 = 0$, waaruit blijkt, dat zij beide loodrecht op de x-as staan, dus evenwijdig zijn. De x-coördinaat van het snijpunt kan dan iedere waarde hebben, want $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$.

Het resultaat van bovenstaande beschouwing is:

Is l_1 een lijn, die de coördinaat-assen snijdt en l_2 een lijn evenwijdig aan l_1, dan heeft het snijpunt van de lijnen coördinaten, die oneindig groot zijn. Men noemt dit snijpunt het oneindig verre punt van l_1; dus iedere lijn, die door het oneindig verre punt van een gegeven lijn gaat, is daaraan evenwijdig.

Het oneindig verre punt van de lijn, die de vergelijking $x = p$ heeft, is het punt (p, ∞); deze lijn is evenwijdig met de y-as, dus gaat door het punt (o, ∞), dat met (p, ∞) samenvalt. Evenzo gaat een lijn, die evenwijdig de x-as is, door het punt (∞, o).

2. De voorwaarde, dat x_1, een wortel is van de vergelijking

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots. + a_n = 0,$$

is te schrijven:

$$a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{x_1^n} = 0,$$

waaruit blijkt, dat $a_0 = 0$ is als $x_1 = \infty$ is; de gegeven vergelijking is dan van de graad $(n-1)$.

Evenzo is door herhaling aan te tonen, dat p wortels oneindig groot zijn, als de gegeven vergelijking van de graad $(n-p)$ is.

Verwachten wij dus door een algebraische bewerking een vergelijking van de graad n en vinden wij een vergelijking van de graad $(n-p)$, dan zijn er van de te verwachten n wortels p oneindig groot. (Het is nuttig er op te wijzen, dat een vergelijking van de eerste graad, waarvan de wortel oneindig groot is, een valse vergelijking is).

3. De verklaring van de begrippen dubbelpunt en buigpunt van een kromme kan gegeven worden door middel van een geschikt gekozen voorbeeld van de grafiek van een functie, zodat de vergelijking in x en y van een graad is geheel en groter dan twee.

Nemen wij voor het dubbelpunt de oplossing van het vraagstuk:

Gegeven een cirkel, die in de oorsprong O aan de y-as raakt en een lijn l, die evenwijdig aan de y-as is. Een willekeurige lijn door O, die l in Q snijdt, snijdt de cirkel in de punten O en P; op deze lijn bepalen wij het punt P′, zodat de lijnsegmenten OP′ en QP in richting en grootte aan elkaar gelijk zijn. Gevraagd wordt de betrekking te bepalen, die tussen de coördinaten van het punt P′ bestaat.

Snijdt l de x-as in A (a, o), is d de middellijn van de cirkel en $\angle$ POA $= \varphi$, dan is OP $= d \cos\varphi$ en OQ $= a \sec\varphi$, dus OP′ $=$ OP — OQ $= d \cos\varphi - a \sec\varphi$; de coördinaten van het punt P′ (x, y) zijn dus bepaald door de betrekkingen:

$$x = (d \cos\varphi - a \sec\varphi) \cdot \cos\varphi$$
$$y = (d \cos\varphi - a \sec\varphi) \cdot \sin\varphi,$$

waaruit, door eliminatie van $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$ volgt:

$$(a + x)(x^2 + y^2) - d\,x^2 = 0.$$

Het zal de leerlingen duidelijk zijn, dat ieder punt P′ een punt is van de grafiek, waarvan de functie door bovenstaande betrekking bepaald is.

Bepalen wij de snijpunten van de grafiek met de lijn, waarvan $y = mx$ de vergelijking is, dan vinden wij, dat twee snijpunten in O vallen en de x-coördinaat van het derde snijpunt de oplossing is van de vergelijking $(a + x)(1 + m^2) - d = 0$; het derde snijpunt valt dus eveneens in O, als de lijn de vergelijking heeft

$$y = \pm \sqrt{\frac{d - a}{a}}\, x.$$

Omdat iedere lijn door O de grafiek snijdt in twee punten, die in O vallen, noemen wij O een dubbelpunt van de grafiek; uit de tekening blijkt, dat door O twee takken van de grafiek gaan in het geval $a < d$ is en ieder van deze takken een raaklijn in O heeft, waarvan volgens het bovenstaande de drie snijpunten met de grafiek in O vallen; het dubbelpunt wordt dan een knooppunt genoemd.

Is $a = d$, dan heeft de grafiek eveneens twee takken, die door O gaan, maar dan vallen de raaklijnen van deze takken in O samen; men noemt dan het dubbelpunt een keerpunt.

Is $a < d$, dan zijn de raaklijnen van de grafiek in het punt O onbestaanbaar en kunnen wij in de buurt van O geen enkel punt van de grafiek tekenen; het dubbelpunt wordt dan een geïsoleerd punt genoemd.

Voor het buigpunt bepalen wij de grafiek van de functie $y = ax^3$.

De rechte lijn, waarvan de vergelijking $y = mx$ is, snijdt de grafiek in O en in de punten $\left(\sqrt{\frac{m}{a}}, m\sqrt{\frac{m}{a}}\right)$ en $\left(-\sqrt{\frac{m}{a}}, -m\sqrt{\frac{m}{a}}\right)$, waaruit onmiddellijk blijkt, door m gelijk nul te stellen, dat de x-as de raaklijn van de grafiek in O is, maar tevens, dat de drie snijpunten van de raaklijn in O met de grafiek in O vallen. Het punt O wordt een buigpunt van de grafiek genoemd.

Om na te gaan of een punt van een grafiek een dubbelpunt of een buigpunt is, bepalen wij de snijpunten van de grafiek met een raaklijn in het punt. Heeft een willekeurige lijn door het punt P twee snijpunten in P en heeft de raaklijn er drie, dan is P een dubbelpunt en heeft een willekeurige lijn door P één snijpunt in P en heeft de raaklijn er drie, dan is P een buigpunt.

Met deze voorbereiding kunnen wij volstaan, als wij ons tot taak stellen het bepalen van de vergelijkingen van de asymptoten van de gebroken kwadratische functie en het bepalen van de coördinaten van het punt S.

§ 7. De rechte lijn, waarvan de vergelijking $y = mx + n$ is, snijdt de grafiek in punten, waarvan de x-coördinaten de wortels zijn van de vergelijking

$$(px^2 + qx + r)\ (mx + n) - (ax^2 + bx + c) = 0;$$

deze vergelijking is van de derde graad in x, heeft dus drie wortels, waaruit volgt, dat iedere rechte lijn de grafiek in drie punten snijdt.

Eén van de wortels is oneindig groot, als $pm = 0$ is, dus als $m = 0$ is; de vergelijking van de lijn is dan $y = n$, waaruit blijkt, dat iedere lijn evenwijdig aan de x-as de grafiek snijdt in een punt, dat oneindig ver ligt; dit is dus het oneindig verre punt van de x-as.

Heeft de vergelijking nog een wortel oneindig groot, is dus $pn + qm - a = 0$, waarin $m = 0$, dus $n = \frac{a}{p}$ is, dan is hiermee aangetoond, dat de lijn, waarvan de vergelijking $y = \frac{a}{p}$ is, de raaklijn van de grafiek in het oneindig verre punt van de x-as is; de raaklijn in een oneindig ver gelegen punt van een grafiek wordt een asymptoot van de grafiek genoemd en omdat deze asymptoot evenwijdig aan de x-as is, spreken wij in het vervolg van de horizontale asymptoot.

Heeft de vergelijking twee wortels oneindig groot, dan is de derde wortel bepaald door $(qa - pb)\ x - (ra - pc) = 0$; deze wortel is ook oneindig groot als $qa - pb = 0$ en $ra - pc \neq 0$. In dit geval snijdt een willekeurige lijn door het punt $(\infty, 0)$ de grafiek éénmaal in het punt en de raaklijn de grafiek driemaal, dus is het punt $(\infty, 0)$ een buigpunt van de grafiek.

Uit het bovenstaande is ons gebleken, dat een lijn, waarvan de richtingscoëfficient ongelijk nul is, geen snijpunt met de grafiek kan hebben, dat oneindig ver ligt. De mogelijkheid bestaat echter nog, dat dit wel het geval is met een lijn, waarvan de richtingscoëfficient oneindig groot is, dus met een lijn, die evenwijdig met de y-as is.

Om dit na te gaan zullen wij, omdat het oneindig verre punt van y-as de y-coördinaat oneindig groot heeft, de y-coördinaten van de snijpunten van een lijn met de grafiek moeten bepalen en kunnen wij niet gebruik maken van de vergelijking van de rechte lijn in de vorm $y = mx + n$, omdat m oneindig groot kan zijn.

Stel dus, dat de vergelijking van de lijn is $x = sy + t$, dan zijn de y-coördinaten van de snijpunten de wortels van de vergelijking:

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud:
P. Wijdenes te Amsterdam, Jacob Obrechtstraat 88.
Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen. Verantwoordelijk voor de advertentiën Drs F. C. Noordhoff.
Verschijnt ongeregeld. Abonnementsprijs *f* 6,30* per jaar.
Prijs per nummer *f* 1,55*.
Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema te Groningen. K 1219.

P 1073/4.